

Capítulo 1. Nociones de Cardinalidad

La noción de cardinalidad permite clasificar a los conjuntos, en cuanto al número de sus elementos, como conjuntos finitos e infinitos, infinitos numerables e infinitos no numerables. Esta noción será de particular utilidad en los temas de separabilidad y compacidad de espacios métricos y normados. En este capítulo se introduce el concepto de cardinalidad y se analizan algunas técnicas y resultados que ayudan a determinar cuándo un conjunto pertenece a alguna de esas clases.

1.1. Conjuntos equipotentes

Para determinar el número de elementos de un conjunto no vacío A se debe establecer una correspondencia biyectiva entre A y algún conjunto conocido C , que se toma de referencia para el conteo. Conjuntos C comúnmente empleados son, por ejemplo,

$$J_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n\}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$\mathbb{N}$, $]0, 1[$, $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, etc.

1.1 Definición. Se dice que dos conjuntos A y B son **equipotentes**, se escribe $A \sim B$, si existe alguna función biyectiva de A sobre B , es decir, si A y B tienen el mismo número de elementos.

Se verifica fácilmente (Ejercicio) que $\sim$ satisface los axiomas de una **relación de equivalencia**¹.

1.2 Ejemplo. Se tiene: $\mathbb{N} \sim \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\} \sim \{3n \mid n \in \mathbb{N}\}$. ◀

1.3 Ejemplo. Se tiene: $\mathbb{R} \sim]0, 1[\sim]a, b[$, $\forall a < b$.

Estas equivalencias se prueban empleando las funciones (Ejercicio)

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x \quad \text{y} \quad g(x) = (1 - x)a + xb,$$

respectivamente. ◀

1.4 Ejemplo. Se tiene: $]0, 1[\sim]0, 1[\sim [0, 1] \sim [a, b]$, $\forall a < b$.

¹Una relación “ $\sim$ ” sobre algún conjunto se dice que es una **relación de equivalencia** si satisface:

i. $x \sim x$; ii. $x \sim y \implies y \sim x$; iii. $x \sim y$ y $y \sim z \implies x \sim z$, $\forall x, y, z$.

Para probar, por ejemplo, que $]0, 1] \sim]0, 1[$ basta definir $f :]0, 1] \rightarrow]0, 1[$ como

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 1/n, n \in \mathbb{N}, \\ \frac{1}{n+1} & \text{si } x = 1/n, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

El lector puede verificar las demás equivalencias como ejercicio. ◀

1.5 Definición. La **cardinalidad** de un conjunto A , denotada por $\text{Card}(A)$, es por definición el número de elementos de A . Por convención, $\text{Card}(\emptyset) = 0$.

Conjuntos equipotentes tienen pues la misma cardinalidad. Se utilizan algunos símbolos, tales como $0, 1, 2, \dots, \aleph_0, \aleph_1, \dots$, llamados “números cardinales”, para denotar la cardinalidad de los conjuntos.

1.2. Conjuntos a lo sumo numerables

1.6 Definición. Se dice que un conjunto X es **finito** si es vacío o existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $X \sim J_n$. En este último caso, se escribe

$$\text{Card}(X) = n.$$

También se dice que X es **numerable** si $X \sim \mathbb{N}$. En este caso, se escribe

$$\text{Card}(X) = \aleph_0.$$

Si X es finito o numerable, se dice que X que es **a lo sumo numerable**. Finalmente, se dice que X es **infinito** si no es finito.

1.7 Ejemplo. Los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ son numerables.

En efecto, el conjunto $\mathbb{N}$ es claramente numerable. La función $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por

$$f(2n) = n \quad \text{y} \quad f(2n+1) = -n, \quad n = 0, 1, \dots$$

es evidentemente biyectiva. ◀

El resultado siguiente, cuya demostración es esencialmente por inducción (Ejercicio), incluye las propiedades esenciales de los conjuntos finitos.

1.1 Proposición. Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Se cumplen las afirmaciones siguientes.

- i. Si $A \subset J_n$ es tal que $A \neq \emptyset$ y $A \neq J_n$, entonces existe $k < n$ tal que $A \sim J_k$.

En particular, un conjunto finito no puede ser equipotente a ninguno de sus subconjuntos propios.

ii. Se tiene que $J_n \sim J_m$ si y sólo si $n = m$.

iii. Se tiene que $\mathbb{N} \not\sim J_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Luego, $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito.

El resultado siguiente establece algunas propiedades básicas de los conjuntos numerables.

1.2 Proposición. *Todo subconjunto de un conjunto numerable es un conjunto a lo sumo numerable.*

Demostración. Basta probar el resultado para $\mathbb{N}$ (¿Por qué?). Sea pues $A \subset \mathbb{N}$.

Suponga primero que A es acotado. Existe entonces $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset J_n$. Por la Proposición 1.1, $A = \emptyset$ o existe $k \leq n$ tal que $A \sim J_k$. En ambos casos, A es finito.

Suponga ahora que A no es acotado. Se construirá inductivamente una función biyectiva α de $\mathbb{N}$ sobre A . Sea $\alpha(1)$ el primer elemento de A , es decir, $1 \leq \alpha(1) < k$, $\forall k \in A \setminus \{\alpha(1)\}$, donde $A \setminus \{\alpha(1)\} \neq \emptyset$ por ser A no acotado. Suponga definidos $\alpha(1), \dots, \alpha(n)$ tales que $n \leq \alpha(n) < k$, $\forall k \in A \setminus \{\alpha(1), \dots, \alpha(n)\}$, donde $A \setminus \{\alpha(1), \dots, \alpha(n)\} \neq \emptyset$ por ser A no acotado. Defina $\alpha(n+1)$ como el primer elemento de $A \setminus \{\alpha(1), \dots, \alpha(n)\}$, es decir, $\alpha(n+1) < k$, $\forall k \in A \setminus \{\alpha(1), \dots, \alpha(n+1)\}$, donde $A \setminus \{\alpha(1), \dots, \alpha(n+1)\} \neq \emptyset$ por ser A no acotado. En particular, $n \leq \alpha(n) < \alpha(n+1)$, de donde, $n+1 \leq \alpha(n+1)$. Se tiene pues definida una función $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow A$ tal que $n \leq \alpha(n)$, $\alpha(n) < \alpha(n+1)$ y $\alpha(n+1) < k$, $\forall k \in A \setminus \{\alpha(1), \dots, \alpha(n)\}$ y $\forall n \in \mathbb{N}$. La función α es pues inyectiva. Si existiera $a \in A$ tal que $a \neq \alpha(k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, necesariamente $k \leq \alpha(k) < a$, $\forall k \in \mathbb{N}$, lo cual sería absurdo. Así pues, la función α es también suprayectiva. Por lo tanto, A es numerable. ■

1.3. El Teorema de Cantor-Bernstein

Es posible introducir un orden total entre los números cardinales de la siguiente manera. Dados dos conjuntos X y Y se tienen, en principio, los cuatro casos siguientes:

i. X no es equipotente a ningún subconjunto de Y pero Y sí es equipotente a algún subconjunto de X . Se escribe en este caso

$$\text{Card}(X) > \text{Card}(Y).$$

ii. Y no es equipotente a ningún subconjunto de X pero X sí es equipotente a algún subconjunto de Y . Se escribe en este caso

$$\text{Card}(X) < \text{Card}(Y).$$

iii. X es equipotente a algún subconjunto de Y y Y es equipotente a algún subconjunto de X . El Teorema de Cantor-Bernstein mostrará en este caso que

$$\text{Card}(X) = \text{Card}(Y).$$

iv. X no es equipotente a ningún subconjunto de Y y Y no es equipotente a ningún subconjunto de X . Este caso es imposible lo cual será aceptado como nuevo axioma.

Así pues, “ $<$ ” es una relación de orden total estricto² en el conjunto de los números cardinales.

Se sigue de inmediato de la Proposición 1.1, por ejemplo, que

$$n < \aleph_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1.3 Teorema. (Teorema de Cantor-Bernstien.) *Dos conjuntos X y Y son equipotentes si y sólo si X es equipotente a algún subconjunto de Y y Y es equipotente a algún subconjunto de X .*

Demostración. La condición es claramente necesaria. Suponga ahora que X es equipotente a un subconjunto Y_1 de Y y que Y es equipotente a un subconjunto X_1 de X . Existen pues dos funciones inyectivas $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$, tales que $f(X) = Y_1$ y $g(Y) = X_1$.

²Una relación “ $<$ ” sobre algún conjunto se dice que es una **relación de orden total estricto** si satisface:

i. $x < y$ o $y < x$, $\forall x \neq y$; **ii.** $x < y$ y $y < z \implies x < z$.

Note que ambas funciones $g \circ f : X \rightarrow X$ y $f \circ g : Y \rightarrow Y$ son también inyectivas. Luego,

$$\begin{aligned} X_2 = g \circ f(X) &\implies X_2 = g(Y_1) \subset g(Y) = X_1, \\ Y_2 = f \circ g(Y) &\implies Y_2 = f(X_1) \subset f(X) = Y_1, \\ X_3 = g \circ f(X_1) &\implies X_3 = g(Y_2) \subset g(Y_1) = X_2, \\ Y_3 = f \circ g(Y_1) &\implies Y_3 = f(X_2) \subset f(X_1) = Y_2. \end{aligned}$$

Así pues,

$$\begin{aligned} X_3 \subset X_2 \subset X_1 \subset X &\quad \text{y} \quad X_2 \sim X, \quad X_3 \sim X_1, \\ Y_3 \subset Y_2 \subset Y_1 \subset Y &\quad \text{y} \quad Y_2 \sim Y, \quad Y_3 \sim Y_1, \end{aligned}$$

donde las equivalencias en el primer caso están dadas por $g \circ f$ y en el segundo, por $f \circ g$.

Procediendo inductivamente (Ejercicio) se demuestra que existen dos sucesiones infinitas de conjuntos $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ y $\{Y_n\}_{n=0}^\infty$, donde $X_0 = X$ y $Y_0 = Y$, tales que, $\forall n \in \mathbb{N}$, se cumplen

$$\begin{aligned} X_{2n+1} \subset X_{2n} \subset \cdots \subset X_2 \subset X_1 \subset X_0 = X \\ \text{y} \quad X_{2n} \sim \cdots \sim X_2 \sim X_0, \quad X_{2n+1} \sim \cdots \sim X_3 \sim X_1, \\ Y_{2n+1} \subset Y_{2n} \subset \cdots \subset Y_2 \subset Y_1 \subset Y_0 = Y \\ \text{y} \quad Y_{2n} \sim \cdots \sim Y_2 \sim Y_0, \quad Y_{2n+1} \sim \cdots \sim Y_3 \sim Y_1, \end{aligned}$$

donde las equivalencias en el primer caso están dadas por $g \circ f$ y en el segundo, por $f \circ g$.

Se afirma que X_1 es equipotente con X . En efecto, se tiene

$$\begin{aligned} X &= \left[\bigcup_{n=0}^\infty (X_n \setminus X_{n+1}) \right] \cup \left[\bigcap_{n=1}^\infty X_n \right], \\ X_1 &= \left[\bigcup_{n=1}^\infty (X_n \setminus X_{n+1}) \right] \cup \left[\bigcap_{n=1}^\infty X_n \right]. \end{aligned}$$

Sean

$$\begin{aligned} N_0 &= \bigcup_{n=0}^\infty (X_{2n} \setminus X_{2n+1}), \quad N_1 = \bigcup_{n=0}^\infty (X_{2n+2} \setminus X_{2n+3}), \\ M &= \bigcup_{n=0}^\infty (X_{2n+1} \setminus X_{2n+2}) \quad \text{y} \quad D = \bigcap_{n=1}^\infty X_n. \end{aligned}$$

Observe que los conjuntos de las uniones anteriores son disjuntos, así como N_0 , M y D e

igualmente N_1 , M y D , además,

$$X = N_0 \cup M \cup D \quad \text{y} \quad X_1 = N_1 \cup M \cup D.$$

Se tiene por construcción de los X_n y de los Y_n que $g \circ f$ es una biyección de N_0 sobre N_1 , luego $N_0 \sim N_1$. Entonces es claro que $X \sim X_1$. Ya que por hipótesis $X_1 \sim Y$, se concluye que $X \sim Y$. ■

1.8 Definición. Sean X y Y dos conjuntos. Se dice que

$$\text{Card}(X) \leq \text{Card}(Y)$$

si X es equipotente a algún subconjunto de Y .

Note que la igualdad se cumple en la desigualdad anterior si Y es también equipotente a algún subconjunto de X (por el Teorema de Cantor-Bernstein), en caso contrario se cumple la desigualdad estricta. Por ejemplo, si $X \subset Y$, necesariamente

$$\text{Card}(X) \leq \text{Card}(Y).$$

Por otra parte, es claro que “ $\leq$ ” es una relación de orden parcial total³ en el conjunto de los números cardinales (Justifique).

Una herramienta natural de comparación entre números cardinales sería la siguiente.

1.4 Proposición. Sea X un conjunto no vacío. Se cumplen las afirmaciones siguientes.

i. Se tiene que $\text{Card}(X) \leq \text{Card}(Y)$ si y sólo si existe una función inyectiva de X en Y .

ii. Se tiene que $\text{Card}(X) \leq \text{Card}(Y)$ si y sólo si existe una función suprayectiva de Y sobre X .

Demostración. (i). Suponga que $\text{Card}(X) \leq \text{Card}(Y)$, es decir, $\text{Card}(X) = \text{Card}(Y)$ o $\text{Card}(X) < \text{Card}(Y)$. Si $\text{Card}(X) = \text{Card}(Y)$, existe por definición una función biyectiva de X sobre Y . Dicha función es, en particular, inyectiva. Si $\text{Card}(X) < \text{Card}(Y)$, entonces X es, en particular, equipotente a un subconjunto de Y , es decir, existe una función

³Una relación “ $\leq$ ” sobre algún conjunto se dice que es una **relación de orden parcial total** si satisface:
i. $x \leq y$ o $y \leq x$; **ii.** $x \leq y$ y $y \leq x \implies x = y$; **iii** $x \leq y$ y $y \leq z \implies x \leq z$, $\forall x, y, z$.

inyectiva de X en Y . En ambos casos se cumple la condición del enunciado.

Recíprocamente, si existe una función inyectiva f de X en Y , entonces $f(X)$ es un subconjunto de Y que es equipotente con X . Luego $\text{Card}(X) \leq \text{Card}(Y)$.

(ii). Suponga nuevamente que $\text{Card}(X) \leq \text{Card}(Y)$. Por (i), existe una función inyectiva $g : X \rightarrow Y$. Sea $f : Y \rightarrow X$ cualquier ampliación de $g^{-1} : g(X) \rightarrow Y$. Entonces f debe ser una función suprayectiva de Y sobre X .

Suponga finalmente que existe una función suprayectiva $f : Y \rightarrow X$. Defina una relación de equivalencia en Y como sigue:

$$y \sim y' \quad \text{si y sólo si} \quad f(y) = f(y').$$

Considere el espacio cociente $\hat{Y} = Y / \sim$ cuyos elementos serán denotados por $\hat{y}$, $\forall y \in Y$. La función $\hat{f} : \hat{Y} \rightarrow X$ dada por $\hat{f}(\hat{y}) = f(y)$, $\forall y \in Y$, está bien definida (por definición de $\sim$) y es biyectiva. En efecto, ya se sabe que $\hat{f}$ es suprayectiva (por ser f suprayectiva) y

$$f(y) = \hat{f}(\hat{y}) = \hat{f}(\hat{y}') = f(y')$$

implica que $y \sim y'$, es decir, $\hat{y} = \hat{y}'$. Así pues, $\hat{f}$ es también inyectiva.

Ahora bien, para cada $x \in X$, existe $\hat{y} \in \hat{Y}$ tal que $x = \hat{f}(\hat{y})$, es decir, $x = f(y)$, $\forall y \in \hat{y}$. Defina $g(x) = y$ donde $y \in \hat{y}$ se fija arbitrariamente. Se afirma que la función g es inyectiva. En efecto, si $x \neq x'$ en X y $g(x) = y$ y $g(x') = y'$, entonces

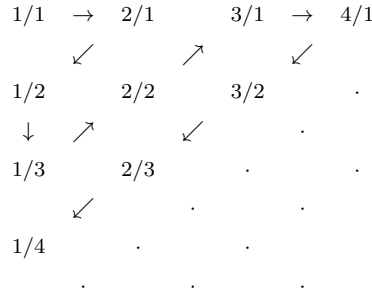
$$\hat{f}(\hat{y}) = f(y) = x \neq x' = f(y') = \hat{f}(\hat{y}'),$$

de donde $\hat{y} \neq \hat{y}'$. Necesariamente $g(x) = y \neq y' = g(x')$, pues $y \in \hat{y}$ y $y' \in \hat{y}'$. Por lo tanto, g es inyectiva. Luego X es equipotente al subconjunto $g(X)$ de Y . Por lo tanto, $\text{Card}(X) \leq \text{Card}(Y)$. ■

1.9 Ejemplo. El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es numerable.

Se definirá una función suprayectiva $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$. Defina $f(2n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, siguiendo las

flechas en la figura de abajo.



Defina ahora $f(2n+1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, usando una tabla similar para los racionales negativos. Finalmente, defina $f(1) = 0$. Es claro que f es una función suprayectiva de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{Q}$. Por la Proposición 1.4, parte (ii), se debe tener $\text{Card}(\mathbb{N}) \geq \text{Card}(\mathbb{Q})$. Así pues, $\mathbb{N}$ es equipotente a un subconjunto de $\mathbb{Q}$ y viceversa. Por el Teorema de Cantor-Bernstein se debe tener $\text{Card}(\mathbb{N}) = \text{Card}(\mathbb{Q})$. ◀

El resultado siguiente es un pequeño refinamiento de la Proposición 1.4 y su demostración se deja como ejercicio para el lector.

1.5 Lema. *Un conjunto X no vacío es a lo sumo numerable si y sólo si existe una función suprayectiva de $\mathbb{N}$ sobre X . En este caso, si $x : \mathbb{N} \rightarrow X$ es tal función y $x_n = x(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces X puede ser escrito en la forma*

$$X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

1.4. Conjuntos numerables y no numerables

La idea empleada en el Ejemplo 1.9 sirve para probar la siguiente propiedad general de los conjuntos numerables.

1.6 Proposición. *La unión de toda familia a lo sumo numerable de conjuntos numerables es un conjunto numerable.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ una familia a lo sumo numerable de conjuntos numerables. Por el Lema 1.5, $\mathcal{A}$ se puede escribir en la forma

$$\mathcal{A} = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\},$$

donde cada conjunto A_n es numerable. Nuevamente por el Lema 1.5, cada A_n puede ser escrito en la forma

$$A_n = \{a_{n,m} \mid m \in \mathbb{N}\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se pide probar que el conjunto

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{a_{n,m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$

es numerable. La función $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ definida siguiendo las flechas en la siguiente tabla:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1} & \rightarrow & a_{1,2} & & a_{1,3} & \rightarrow & a_{1,4} \\ & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\ a_{2,1} & & a_{2,2} & & a_{2,3} & & \cdot \\ \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & \cdot \\ a_{3,1} & & a_{3,2} & & \cdot & & \cdot \\ & \swarrow & & & \cdot & & \cdot \\ a_{4,1} & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ & & \cdot & & \cdot & & \cdot \end{array}$$

es claramente suprayectiva. Por el Lema 1.5, el conjunto A debe ser a lo sumo numerable, es decir, $\text{Card}(A) \leq \aleph_0$. Pero como $A_1 \subset A$ y A_1 es numerable, necesariamente $\text{Card}(A) \geq \text{Card}(A_1) = \aleph_0$. Por lo tanto, $\text{Card}(A) = \aleph_0$, es decir, A es un conjunto numerable. ■

1.10 Ejemplo. Los conjuntos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ son numerables. En efecto basta observar que

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \quad \text{y} \quad \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n,$$

donde

$$Q_n = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{y} \quad N_n = \{(n, m) \mid m \in \mathbb{N}\}$$

son claramente conjuntos numerables (¿Por qué?), $\forall n \in \mathbb{N}$. ◀

1.11 Observación. Recuerde que cada punto $x \in]0, 1[$ admite al menos una representación decimal de la forma

$$x = 0.x_1x_2x_3\cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{10^k},$$

donde $x_k \in \{0, \dots, 9\}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Además,

$$0.x_1x_2x_3\cdots = 0.y_1y_2y_3\cdots$$

si y sólo si bien $x_j = y_j, \forall j \in \mathbb{N}$, o bien existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_j = y_j, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad x_N = y_N + 1, \quad \text{y} \quad x_j = 0, \quad y_j = 9, \quad \forall j > N,$$

donde esto último equivale a decir que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$x \in \left\{ \frac{p}{10^N} \mid p < 10^N, p \in \mathbb{N} \right\}.$$

Por ejemplo,

$$0.3424999 \dots = 0.3425000 \dots = \frac{3425}{10^4},$$

pues

$$\sum_{j=5}^{\infty} \frac{9}{10^j} = \frac{1}{10^4}.$$

Como consecuencia de lo anterior se tiene que si $x, y \in]0, 1[$ tienen representaciones decimales

$$x = 0.x_1x_2x_3 \dots \quad \text{y} \quad y = 0.y_1y_2y_3 \dots$$

tales que $x_n \neq y_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y $y_j \neq 0, 9, \forall j \in \mathbb{N}$, entonces $x \neq y$.

En el caso de representaciones binarias y ternarias se tiene lo siguiente.

Un punto $x \in [0, 1]$ admite dos representaciones **ternarias** distintas

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t'_n}{3^n},$$

donde $t_n, t'_n \in \{0, 1, 2\}, \forall n \in \mathbb{N}$, si y sólo si bien $t_n = t'_n, \forall n \in \mathbb{N}$, o bien existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $t_n = t'_n, n = 1, \dots, N-1, t_N = t'_N + 1, t_n = 0$ y $t'_n = 2, \forall n > N$. Por cierto, el subconjunto del $[0, 1]$ formado este tipo de puntos x es precisamente

$$Z_3 = \left\{ \frac{k}{3^N} \mid k \leq 3^N; k, N \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}.$$

Un punto $x \in]0, 1[$ admite dos representaciones **binarias** distintas

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b'_n}{2^n},$$

donde $b_n, b'_n \in \{0, 1, 2\}, \forall n \in \mathbb{N}$, si y sólo si bien $b_n = b'_n, \forall n \in \mathbb{N}$, o bien existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $b_n = b'_n, n = 1, \dots, N-1, b_N = b'_N + 1, b_n = 0$ y $b'_n = 1, \forall n > N$. Por cierto, el subconjunto del $]0, 1[$ formado este tipo de puntos x es precisamente

$$Z_2 = \left\{ \frac{k}{2^N} \mid k < 2^N; k, N \in \mathbb{N} \right\}. \triangleleft$$

1.12 Ejemplo. $\mathbb{R}$ es un conjunto infinito no numerable, se escribe

$$\text{Card}(\mathbb{R}) = \aleph_1.$$

Note que como $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, se debe tener $\aleph_0 = \text{Card}(\mathbb{Q}) \leq \text{Card}(\mathbb{R}) = \aleph_1$; pero siendo $\mathbb{R}$ infinito no numerable, entonces $\mathbb{R}$ no puede ser equipotente a ningún subconjunto de $\mathbb{Q}$ (vea la Proposición 1.2), luego $\text{Card}(\mathbb{Q}) < \text{Card}(\mathbb{R})$, es decir,

$$\aleph_0 < \aleph_1.$$

En efecto, se razona por reducción al absurdo. Suponga pues que $\mathbb{R}$ fuese a lo sumo numerable. Como $\mathbb{R} \sim]0, 1[$, entonces $]0, 1[$ también debería ser a lo sumo numerable. Por el Lema 1.5, $]0, 1[$ puede ser escrito en la forma

$$]0, 1[= \{r_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Escriba cada r_n con su representación decimal: $r_n = 0.r_{n,1}r_{n,2}r_{n,3} \cdots$. Defina $r \in]0, 1[$ mediante su representación decimal como

$$r = 0.r_1r_2r_3 \cdots,$$

donde $r_n \neq r_{n,n}$ y $r_n \neq 0, 9, \forall n \in \mathbb{N}$. De acuerdo a la Observación 1.11, $r \neq r_n, \forall n \in \mathbb{N}$, lo cual sería absurdo. ◀

1.5. Propiedades de los conjuntos infinitos

1.7 Proposición. *Todo conjunto infinito contiene un subconjunto numerable.*

Demostración. Sea X un conjunto infinito. Se definirá inductivamente una función inyectiva $x : \mathbb{N} \rightarrow X$. Por ser X infinito, $X \neq \emptyset$. Sea $x(1) = x_1$ cualquier elemento de X . Por ser X infinito, $X \not\sim J_1$. Luego $X \setminus \{x_1\} \neq \emptyset$, pues de otra forma X tendría que ser igual a $\{x_1\}$, el cual es equipotente con J_1 , lo que sería contradictorio. Sea $x(2) = x_2$ cualquier elemento de $X \setminus \{x_1\}$. Por construcción, $x_1 \neq x_2$. Suponga definidos $x(1) = x_1, \dots, x(n) = x_n$ en X tales que $x_i \neq x_j, \forall i \neq j$ en $J_n = \{1, \dots, n\}$. Como X es infinito, $X \not\sim J_n$. Luego $X \setminus \{x_1, \dots, x_n\} \neq \emptyset$, de otra forma X tendría que ser igual a $\{x_1, \dots, x_n\}$ el cual es equipotente a J_n lo que sería contradictorio. Defina $x(n+1)$ como cualquier elemento de $X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$. Por la hipótesis inductiva, se debe tener $x(i) = x_i \neq x_j = x(j), \forall i \neq j$ en

$J_{n+1} = \{1, \dots, n+1\}$. Por inducción se tiene pues definida una función inyectiva $x : \mathbb{N} \rightarrow X$. Claramente, el subconjunto $x(\mathbb{N}) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de X es numerable. ■

Como consecuencia de las Proposiciones 1.4 y 1.7 se tiene pues que $\aleph_0$ debe ser el más pequeño de los números cardinales infinitos.

1.8 Lema. Sean X y N dos conjuntos. Si X es infinito y N es numerable, entonces

$$X \sim X \cup N.$$

Demostración. Por la Proposición 1.7 existe un subconjunto numerable M de X . Es fácil ver que existen dos subconjuntos numerables M_1 y M_2 de M tales que $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ y $M = M_1 \cup M_2$ (Ejercicio). Observe que

$$X = (X \setminus M) \cup N = (X \setminus M) \cup M_1 \cup M_2,$$

$$X \cup N = (X \setminus M) \cup M \cup N,$$

donde los conjuntos de la derecha en las identidades anteriores son disjuntos, respectivamente. Además,

$$X \setminus M \sim X \setminus M, \quad M_1 \sim M \quad \text{y} \quad M_2 \sim N.$$

Se sigue de inmediato (Ejercicio) que

$$X = (X \setminus M) \cup M_1 \cup M_2 \sim (X \setminus M) \cup M \cup N = X \cup N. \blacksquare$$

1.13 Ejemplo. El conjunto $\mathbb{I}$ de los números irracionales es infinito no numerable. Además

$$\text{Card}(\mathbb{I}) = \text{Card}(\mathbb{R}) = \aleph_1.$$

En efecto, si $\mathbb{I}$ fuese a lo sumo numerable, se tendría que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ sería numerable, pues $\mathbb{Q}$ es numerable (vea la Proposición 1.6). Por lo tanto, $\mathbb{I}$ es infinito no numerable. Además, por el Lema 1.8, se debe tener

$$\text{Card}(\mathbb{I}) = \text{Card}(\mathbb{I} \cup \mathbb{Q}) = \text{Card}(\mathbb{R}) = \aleph_1. \blacktriangleleft$$

El resultado siguiente marca la diferencia esencial que hay entre los conjuntos finitos e infinitos.

1.9 Proposición. Sea X un conjunto infinito. Entonces existe un subconjunto propio A de

X tal que $X \sim A$.

Demostración. Por la Proposición 1.7, X contiene algún subconjunto numerable M . Es fácil ver que existen dos conjuntos numerables M_1 y M_2 tales que $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ y $M = M_1 \cup M_2$. Escriba a X en la forma

$$X = [(X \setminus M) \cup M_1] \cup M_2,$$

donde $(X \setminus M) \cup M_1$ es infinito, M_2 es numerable y $[(X \setminus M) \cup M_1] \cap M_2 = \emptyset$. El Lema 1.8 asegura entonces que

$$X = [(X \setminus M) \cup M_1] \cup M_2 \sim X = (X \setminus M) \cup M_1.$$

El conjunto $A = (X \setminus M) \cup M_1$ es pues un subconjunto propio de X que es equipotente con X . ■

Por ejemplo,

$$\mathbb{N} \sim \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{y} \quad [0, 1] \sim [0, 1[.$$

A continuación se verá la relación que existe entre la cardinalidad de un conjunto X y la de su conjunto potencia, es decir, el conjunto formado por todos los subconjuntos de X , denotado indistintamente por $\mathcal{P}(X)$ o 2^X . En el caso $\mathbb{N}$ se tiene el resultado siguiente.

1.10 Proposición. *Se tiene que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es equipotente con $[0, 1[$, en símbolos,*

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

Demostración. Se afirma que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es equivalente a un subconjunto de $[0, 1[$. En efecto, considere la función $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, 1[$ definida como sigue. $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $f(A) \in [0, 1[$ está dado por

$$f(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{3^n},$$

donde $t_n = 1$ si $n \in A$ y $t_n = 0$ si $n \notin A$. Note, por ejemplo, que $f(\emptyset) = 0$. Por la Observación 1.11, la función f es inyectiva (pues $f(A) \notin \mathbb{Z}_3$, $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$). Luego, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es equipotente a un subconjunto de $[0, 1[$.

Se afirma ahora que $]0, 1[$ es equipotente con algún subconjunto de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. En la Observación 1.11 se mencionó que $x \in]0, 1[$ satisface

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b'_n}{2^n}$$

si y sólo si $b_n = b'_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, o bien existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $b_n = b'_n$, $n = 1, \dots, N-1$, $b_N = b'_N + 1$, $b_n = 0$ y $b'_n = 1$, $\forall n > N$, donde esto último equivale a decir que

$$x \in Z_2 = \left\{ \frac{k}{2^N} \mid k < 2^N, k, N \in \mathbb{N} \right\}.$$

Así pues, los elementos de $]0, 1[\setminus Z_2$ admiten una única representación binaria. Luego, si $x, y \in]0, 1[\setminus Z_2$, donde

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n} \quad \text{y} \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b'_n}{2^n},$$

entonces $x = y$ si y sólo si $b_n = b'_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Defina ahora la función $f :]0, 1[\setminus Z_2 \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ de la siguiente manera. Dado $x \in]0, 1[\setminus Z_2$, digamos

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n},$$

defina $f(x) \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ como

$$f(x) = \{n \in \mathbb{N} \mid b_n = 1\}.$$

Por lo anterior, f está bien definida y claramente es inyectiva.

Note que el conjunto Z_2 es numerable (¿Por qué?), luego

$$\text{Card}([0, 1[\setminus Z_2) = \text{Card}([0, 1[)$$

(Justifique). Existe pues una función biyectiva $g :]0, 1[\rightarrow]0, 1[\setminus Z_2$. Finalmente, como $[0, 1[\sim]0, 1[$, existe otra función biyectiva $h : [0, 1[\rightarrow]0, 1[$. Entonces la función $f \circ g \circ h$ es una función inyectiva de $[0, 1[$ en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Esto prueba que $[0, 1[$ es equipotente con algún subconjunto de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. El Teorema de Cantor-Bernstein concluye la prueba. ■

1.11 Proposición. *Para cualquier conjunto X , la cardinalidad de X es estrictamente menor que la cardinalidad de $\mathcal{P}(X)$*

Demostración. Se probará que

$$\text{Card}(X) \leq \text{Card}(\mathcal{P}(X)) \quad \text{y} \quad \text{Card}(X) \neq \text{Card}(\mathcal{P}(X)).$$

Es claro que X es equipotente al subconjunto $\{\{x\} \mid x \in X\}$ de $\mathcal{P}(X)$. Luego, $\text{Card}(X) \leq \text{Card}(\mathcal{P}(X))$.

Para probar que $\text{Card}(X) \neq \text{Card}(\mathcal{P}(X))$ se razonará por reducción al absurdo. Suponga pues que existiera una función biyectiva $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$. Considere el elemento $A \in \mathcal{P}(X)$ dado por

$$A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}.$$

Puesto que f es suprayectiva, debería existir $a \in X$ tal que $f(a) = A$. Ahora bien, se debería tener que $a \in f(a)$ o $a \notin f(a)$. Pero

$$\begin{aligned} a \in f(a) = \{x \in X \mid x \notin f(x)\} &\implies a \notin f(a), \\ a \notin f(a) = \{x \in X \mid x \notin f(x)\} &\implies a \in f(a), \end{aligned}$$

lo cual sería absurdo. Así pues, $\text{Card}(X) \neq \text{Card}(\mathcal{P}(X))$. ■

Se sigue de lo demostrado que

$$1 < 2 < \dots < n < \dots \aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < \dots$$

Por cierto, la llamada Hipótesis del Continuo asegura que no existen números cardinales intermedios en esta lista.

Ejercicios

1.1. Recuerde que $J_n = \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. **Pruebe** que si $k \in J_m$, $m > 1$, entonces $J_m \setminus \{k\} \sim J_{m-1}$.

1.2. Demuestre que si A es un subconjunto propio no vacío de J_n , entonces $A \sim J_k$ para algún $k < n$. **Deduzca** que todo subconjunto de un conjunto finito es un conjunto finito.

1.3. Demuestre por inducción sobre n que $J_n \not\sim J_m$, $\forall m > n$. **Muestre** además que $\mathbb{N} \not\sim J_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1.4. Muestre que la unión de toda familia finita de conjuntos finitos es un conjunto finito.

1.5. Usando la definición de conjuntos equipotentes, **pruebe** que $]0, 1[\sim [0, 1]$.

1.6. Demuestre que los siguientes conjuntos son numerables.

i. Todos los números reales con dos representaciones decimales (ternarias o binarias) distintas.

- ii. Todos los intervalos de $\mathbb{R}$ con extremos racionales.
- iii. Todos los polinomios reales con coeficientes racionales.

1.7. Pruebe las afirmaciones siguientes:

- i. X numerable y N finito implica $X \setminus N$ es numerable.
 - ii. X infinito y N a lo sumo numerable implica $X \cup N \sim X$.
- Sugerencia.* Adapte la demostración del Lema 1.8.
- iii. X no numerable y N a lo sumo numerable implica $X \setminus N \sim X$.

1.8. Pruebe el Lema 1.5.

1.9. Aplicando el Teorema de Cantor-Bernstein, **demuestre** que los cuatro intervalos: $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b[$ y $]a, b]$, donde $a < b$ en $\mathbb{R}$, son equipotentes.

1.10. Muestre que todo conjunto con un subconjunto infinito no numerable es un conjunto infinito no numerable.

1.11. Demuestre que los conjuntos siguientes tienen la misma cardinalidad que $\mathbb{R}$.

- i. La unión de toda familia a lo sumo numerable de conjuntos con cardinalidad $\aleph_1$.
- ii. Todas las sucesiones infinitas de números naturales.
- iii. $\mathbb{R}^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- iv. Todas las sucesiones infinitas de números reales.

1.12. Pruebe que el conjunto de todas las funciones de un conjunto no vacío M en $\mathbb{R}$ tiene cardinalidad mayor que la cardinalidad de M . **Deduzca** que el conjunto de todas las funciones de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$ tiene cardinalidad mayor que $\aleph_1$.

Sugerencia. El conjunto de todas las funciones características de M en $\mathbb{R}$, es decir, aquellas funciones que toman solamente los valores 0 y 1, es equivalente a $\mathcal{P}(M)$.

1.13. Demuestre que si A y B son conjuntos a lo sumo numerables, entonces el producto cartesiano $A \times B$ es también un conjunto a lo sumo numerable y que si al menos uno de ellos es numerable, entonces el producto cartesiano también lo es. Extienda este resultado a cualquier producto cartesiano finito de conjuntos a lo sumo numerables.

1.14. Los ejercicios y preguntas que aparecen a lo largo del capítulo.

Capítulo 2. Espacios Métricos

La noción de distancia estudiada en los cursos de Cálculo, así como un gran número de conceptos relacionados con dicha noción, es generalizada en este capítulo. Más precisamente, se desarrollan los temas siguientes: métricas y normas, la topología de los espacios métricos y sus propiedades (incluyendo el caso particular importante de separabilidad), diversos conceptos asociados a la noción de continuidad para funciones. Se incluyen varios ejemplos clásicos de espacios métricos y normados. En el siguiente capítulo se analizarán los teoremas fuertes de la teoría de espacios métricos relacionados con las propiedades de completez, compacidad y conexidad.

Esta generalización es realmente necesaria porque en áreas de estudio como Topología, Integración de Lebesgue, Probabilidad, Análisis Funcional, etc., se requiere del uso de espacios, cuyos elementos pueden ser muy generales, como números reales, vectores, sucesiones, funciones, conjuntos u objetos más generales, que estén provistos de una o más nociones de distancia para su análisis.

2.1. Espacios métricos y normados

En la siguiente definición se abstraen las propiedades esenciales del concepto de distancia de los números reales inducida por el valor absoluto.

2.1 Definición. Sea X un conjunto. Se dice que una función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ es una **métrica** o **distancia** sobre X si, $\forall x, y, z \in X$, la función d tiene las propiedades siguientes.

- i. $d(x, y) \geq 0$. (**No negatividad**).
- ii. $d(x, y) = d(y, x)$. (**Reflexividad**).
- iii. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. (**Desigualdad triangular**).
- iv. $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

Al par (X, d) se le llama **espacio métrico**.

2.2 Ejemplo. La función $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d(x, y) = |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

es una métrica sobre $\mathbb{R}$, conocida como la **distancia usual** sobre $\mathbb{R}$. ◀

2.3 Ejemplo. Sea X un conjunto arbitrario. La función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y, \end{cases}$$

es una métrica sobre X , conocida como la **métrica discreta** sobre X . Al par (X, d) se le llama **espacio métrico discreto**. ◀

2.4 Ejemplo. Sea $X = \{a, b, c\}$ y defina $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$d(a, b) = 1, \quad d(a, c) = 2, \quad d(b, c) = 3,$$

$d(a, a) = d(b, b) = d(c, c) = 0$ y $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in X$. Se verifica de inmediato (Ejercicio) que d es una métrica sobre X . ¿Y si $d(a, c)$ es igual a 1.5 en lugar de 2, seguirá siendo d una métrica? (Justifique). ◀

2.5 Ejemplo. Se verifica fácilmente (Ejercicio) que la función $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

es una métrica sobre $\mathbb{R}$. ◀

2.6 Ejemplo. (Sistema ampliado de los números reales.) El conjunto $\overline{\mathbb{R}}$ se define como la unión de $\mathbb{R}$ con dos elementos que no pertenecen a $\mathbb{R}$, denotados por $+\infty$ y $-\infty$.

Dados x y y en $\overline{\mathbb{R}}$, se definen $x + y$, $x \cdot y$ y $x < y$ del modo usual si $x, y \in \mathbb{R}$, y

$$\begin{aligned} +\infty + x &= x + (+\infty) = +\infty, & -\infty + x &= x + (-\infty) = -\infty, & \forall x \in \mathbb{R}, \\ +\infty + (+\infty) &= +\infty, & -\infty + (-\infty) &= -\infty \\ (+\infty) \cdot x &= x \cdot (+\infty) = +\infty, & (-\infty) \cdot x &= x \cdot (-\infty) = -\infty, & \forall x > 0, \\ (+\infty) \cdot x &= x \cdot (+\infty) = -\infty, & (-\infty) \cdot x &= x \cdot (-\infty) = +\infty, & \forall x < 0 \\ (+\infty)(+\infty) &= (-\infty)(-\infty) = +\infty, & (+\infty)(-\infty) &= (-\infty)(+\infty) = -\infty. \end{aligned}$$

Además,

$$-\infty < x < +\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

quedando indeterminados $(+\infty) + (-\infty)$, $(-\infty) + (+\infty)$, $0 \cdot (+\infty)$, $(+\infty) \cdot 0$, $0 \cdot (-\infty)$ y $(-\infty) \cdot 0$. Se acostumbra escribir $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ y también se escribe indistintamente $+\infty$ y ∞ . Observe, en particular, que todo subconjunto de $\overline{\mathbb{R}}$ posee un supremo e ínfimo en $\overline{\mathbb{R}}$.

Considere ahora la función $f : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow [-1, 1]$ dada por

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$f(+\infty) = 1$ y $f(-\infty) = -1$. f es una función biyectiva de $\overline{\mathbb{R}}$ sobre $[-1, 1]$ cuya función inversa $f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ está dada por

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1 - |y|}, \quad \forall y \in [-1, 1],$$

$f^{-1}(-1) = -\infty$ y $f^{-1}(1) = +\infty$ (vea la Figura 2.1).

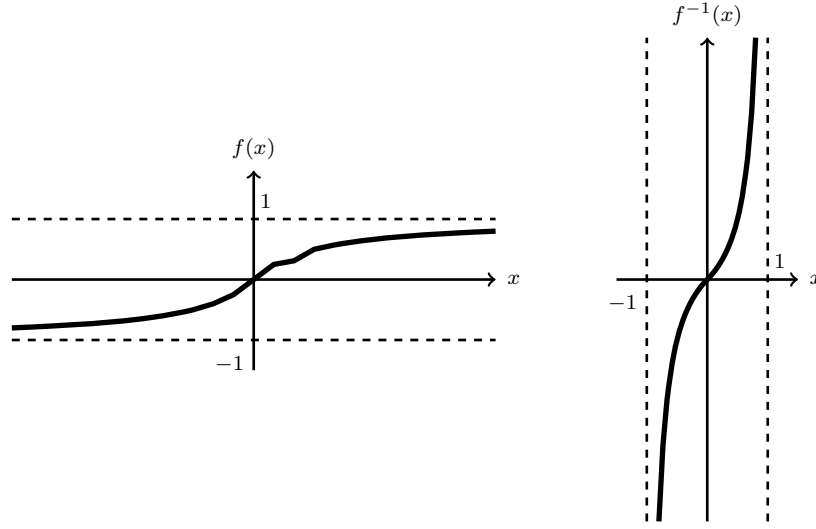


Figura 2.1

Se define la función $d : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$d(x, y) = |f(x) - f(y)|, \quad \forall x, y \in \overline{\mathbb{R}},$$

es decir, se transforman x y y en puntos de $[-1, 1]$ a través de f y se mide su distancia en $[-1, 1]$ con la distancia usual de $\mathbb{R}$. Se verifica de inmediato (Ejercicio) que d es una métrica sobre $\overline{\mathbb{R}}$. Por ejemplo,

$$d(x, +\infty) = \left| \frac{x}{1+x} - 1 \right| = \frac{1}{1+x}, \quad \forall x \geq 0,$$

$$d(x, -\infty) = \left| \frac{x}{1-x} + 1 \right| = \frac{1}{1-x}, \quad \forall x \leq 0.$$

Al espacio métrico $(\overline{\mathbb{R}}, d)$ se le llama el **sistema ampliado de los números reales o recta extendida**.

Se obtendría una “métrica equivalente” (más adelante se precisará este concepto) si se

tomara cualquier función f continua, estrictamente creciente y con límites finitos $f(-\infty)$ y $f(\infty)$, por ejemplo, $f(x) = \arctan x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. ◀

2.7 Ejemplo. (Espacios métricos producto.) Si (X, d_X) y (Y, d_Y) son dos espacios métricos, entonces la función

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}, \quad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y,$$

es una métrica sobre $X \times Y$. Al par $(X \times Y, d)$ se le llama el **espacio métrico producto** de X y Y . ◀

2.8 Ejemplo. (Subespacios métricos.) Sea (X, d_X) un espacio métrico y sea A cualquier subconjunto de X . Entonces la restricción de d_X a A , es decir, la función $d_A = d_X|_{A \times A}$, o sea,

$$d_A(a, b) = d_X|_{A \times A}(a, b), \quad \forall a, b \in A,$$

es claramente (Ejercicio) una métrica sobre A . Al par (A, d_A) se le llama **subespacio métrico** del espacio métrico (X, d_X) . Se escribe indistintamente $d_X = d_A = d$ si no hay peligro de confusión. ◀

La siguiente versión de la desigualdad triangular será usada frecuentemente.

2.1 Proposición. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z), \quad \forall x, y, z \in X.$$

Demostración. Suponga, por ejemplo, que $d(x, y) \geq d(y, z)$. Por la desigualdad triangular, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Luego

$$|d(x, y) - d(y, z)| = d(x, y) - d(y, z) \leq d(x, z).$$

El caso $d(x, y) \leq d(y, z)$ es similar (Ejercicio). ■

Los espacios métricos y topológicos más comunes en diversos áreas de estudio son espacios vectoriales (y sus correspondientes subespacios y subconjuntos) en los cuales la métrica es inducida por una norma.

2.9 Definición. Sea E un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$. Se dice que una función $\mathcal{N} : E \rightarrow \mathbb{R}$ es una **norma** sobre E si la función $\mathcal{N}$ tiene las propiedades siguientes. $\forall x, y \in E$

y $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, se cumple:

- i. $\mathcal{N}(x) \geq 0$.
- ii. $\mathcal{N}(\alpha x) = |\alpha| \mathcal{N}(x)$.
- iii. $\mathcal{N}(x + y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)$. (**Desigualdad triangular.**)
- iv. $\mathcal{N}(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Al par $(E, \mathcal{N})$ se le llama **espacio normado**.

2.2 Proposición. Si $(E, \mathcal{N})$ es un espacio normado, entonces la función $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d(x, y) = \mathcal{N}(x - y), \quad \forall x, y \in E,$$

es una distancia sobre E , conocida como la **métrica inducida** por la norma $\mathcal{N}$.

Demostración. Es claro que d es no negativa. Además,

$$d(x, y) = \mathcal{N}(x - y) = |-1| \mathcal{N}(y - x) = d(y, x),$$

luego d es reflexiva. También,

$$d(x, z) = \mathcal{N}(x - z) \leq \mathcal{N}(x - y) + \mathcal{N}(y - z) = d(x, y) + d(y, z),$$

por la desigualdad triangular. Finalmente, $\mathcal{N}(x - y) = d(x, y) = 0$ si y sólo si $x - y = 0$ si y sólo si $x = y$. ■

Se tiene la importante desigualdad siguiente.

2.3 Proposición. Si $(E, \mathcal{N})$ es un espacio normado, entonces se cumple la desigualdad

$$|\mathcal{N}(x) - \mathcal{N}(y)| \leq \mathcal{N}(x - y), \quad \forall x, y \in E.$$

Para su demostración basta recordar que

$$\mathcal{N}(x) = d(x, 0), \quad \forall x \in E,$$

y aplicar la Proposición 2.1.

Espacios normados clásicos

Se presentan a continuación los espacios de sucesiones de números reales. Recuerde que una sucesión de números reales es simplemente una función $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Escribiendo

$x_n = x(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, se acostumbra denotar a la sucesión x por

$$x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty},$$

aunque para el caso de sucesiones x que son interpretados como puntos de los espacios de sucesiones reales a veces será más conveniente emplear las notaciones

$$x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} = (x_1, x_2, x_3, \dots).$$

Ambas notaciones serán empleadas indistintamente a lo largo de este manuscrito sin mayor advertencia.

Para todo par de sucesiones de números reales $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ y para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, se escribe

$$\alpha x = \{\alpha x_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad x + y = \{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{y} \quad xy = \{x_n y_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Observe que el conjunto formado por todas las sucesiones de números reales es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$ provisto de las operaciones de adición y multiplicación por escalares anteriores. En lo sucesivo se denotará por $\underline{c}$ la sucesión constante de valor c , $c \in \mathbb{R}$.

2.10 Definición. Sea $1 \leq p < \infty$. Se denota por ℓ_p al conjunto formado por todas las sucesiones x de números reales tales que $\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty$. Se define la función $\mathcal{N}_p : \ell_p \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\mathcal{N}_p(x) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right]^{1/p}, \quad \forall x \in \ell_p.$$

Se denota por ℓ_{∞} el conjunto de todas las sucesiones x de números reales que son acotadas, es decir, tales que $\sup_{n \geq 1} |x(n)| < \infty$. Se define la función $\mathcal{N}_{\infty} : \ell_{\infty} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\mathcal{N}_{\infty}(x) = \sup_{n \geq 1} |x(n)|, \quad \forall x \in \ell_{\infty}.$$

Serán necesarios varios resultados preliminares para probar que las funciones anteriores son normas.

2.4 Proposición. Sea $1 \leq p \leq \infty$. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $x \in \ell_p$, entonces $\alpha x \in \ell_p$ y $\mathcal{N}_p(\alpha x) = |\alpha| \mathcal{N}_p(x)$. Además, $\mathcal{N}_p(x) = 0$ si y sólo si $x(n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, es decir, $x = 0$.

La demostración es inmediata y se deja como ejercicio para el lector.

2.5 Lema. $\forall \alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha, \beta \geq 0$ y $0 < \lambda < 1$, se tiene que

$$\alpha^\lambda \beta^{1-\lambda} \leq \lambda \alpha + (1 - \lambda) \beta.$$

Además, la igualdad se cumple en la desigualdad anterior si y sólo si $\alpha = \beta$.

Demostración. Si $\beta = 0$, el lema se cumple trivialmente (Ejercicio). Suponga entonces que $\beta \neq 0$. Defina la función $\varphi : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\varphi(t) = (1 - \lambda) + \lambda t - t^\lambda, \quad \forall t \geq 0.$$

Se tiene

$$\varphi'(t) = \lambda(1 - t^{\lambda-1}), \quad \forall t > 0.$$

Puesto que $\lambda - 1 < 0$, necesariamente

$$\varphi'(t) < 0, \quad \forall 0 < t < 1, \quad \text{y} \quad \varphi'(t) > 0, \quad \forall t > 1,$$

de donde

$$\varphi(t) > \varphi(1) = 0, \quad \forall t \neq 1,$$

es decir,

$$t^\lambda \leq (1 - \lambda) + \lambda t, \quad \forall t \geq 0,$$

cumpliéndose la igualdad si y sólo si $t = 1$. La demostración termina al tomar $t = \alpha/\beta$. ■

2.6 Teorema. (Desigualdad de Hölder.) Sean $p, q \in [1, \infty]$ tales que $1/p + 1/q = 1$. Si $x \in \ell_p$ y $y \in \ell_q$, entonces $xy \in \ell_1$ y

$$\mathcal{N}_1(xy) = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)y(n)| \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right]^{1/p} \left[\sum_{n=1}^{\infty} |y(n)|^q \right]^{1/q} = \mathcal{N}_p(x) \mathcal{N}_1(y)$$

en el caso $1 < p, q < \infty$; y

$$\mathcal{N}_1(xy) = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)y(n)| \leq \left[\sup_{1 \leq n \leq \infty} |y(n)| \right] \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| \right] = \mathcal{N}_1(x) \mathcal{N}_\infty(y)$$

en el caso $p = 1$ y $q = \infty$.

Demostración. Se deja como ejercicio para el lector demostrar el caso $p = 1$ y $q = \infty$. Suponga entonces que $1 < p, q < \infty$. Si $\mathcal{N}_p(x) \mathcal{N}_q(y) = 0$, se cumple trivialmente la igualdad con cero en la desigualdad de Hölder. Se puede suponer pues que $\mathcal{N}_p(x) \mathcal{N}_q(y) \neq 0$.

(a). Suponga adicionalmente que $\mathcal{N}_p(x) = \mathcal{N}_q(y) = 1$. Aplique el Lema 2.5 con

$$\alpha = |x(n)|^p, \quad \beta = |y(n)|^q \quad \lambda = \frac{1}{p} \quad \text{y} \quad 1 - \lambda = \frac{1}{q},$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Resulta

$$|x(n)y(n)| = \alpha^\lambda \beta^{1-\lambda} \leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\beta = \frac{1}{p}|x(n)|^p + \frac{1}{q}|y(n)|^q, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)y(n)| \leq \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p + \frac{1}{q} \sum_{n=1}^{\infty} |y(n)|^q = \frac{1}{p}\mathcal{N}_p(x)^p + \frac{1}{q}\mathcal{N}_q(y)^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)y(n)| \leq 1.$$

(b). En el caso general, observe que $x/\mathcal{N}_p(x) \in \ell_p$, $y/\mathcal{N}_q(y) \in \ell_q$ y

$$\mathcal{N}_p\left(\frac{x}{\mathcal{N}_p(x)}\right) = \mathcal{N}_q\left(\frac{y}{\mathcal{N}_q(y)}\right) = 1.$$

La parte (a) asegura entonces que

$$1 \geq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x(n)}{\mathcal{N}_p(x)} \frac{y(n)}{\mathcal{N}_q(y)} \right| = \frac{1}{\mathcal{N}_p(x)\mathcal{N}_q(y)} \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)y(n)|.$$

Luego, $xy \in \ell_1$ y

$$\mathcal{N}_1(xy) = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)y(n)| \leq \mathcal{N}_p(x)\mathcal{N}_q(y). \blacksquare$$

2.7 Teorema. (Desigualdad de Minkowski.) Sea $p \in [1, \infty]$. Si $x, y \in \ell_p$, entonces $x + y \in \ell_p$ y

$$\mathcal{N}_p(x + y) \leq \mathcal{N}_p(x) + \mathcal{N}_p(y).$$

Demostración. Los casos $p = 1$ y $p = \infty$ son inmediatos y se dejan como ejercicio para el lector. Suponga entonces que $1 < p < \infty$. Si $\mathcal{N}_p(x + y) = 0$, es decir, $x + y = 0$, la desigualdad de Minkowski se cumple trivialmente. Se puede suponer entonces que $x + y \neq 0$, es decir, $\mathcal{N}_p(x + y) > 0$.

Puesto que

$$\begin{aligned} |x(n) + y(n)|^p &\leq [|x(n)| + |y(n)|]^p \\ &\leq [2 \max\{|x(n)|, |y(n)|\}]^p \leq 2^p [|x(n)|^p + |y(n)|^p], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

entonces $x + y \in \ell_p$. Por otra parte,

$$|x(n) + y(n)|^p \leq |x(n) + y(n)|^{p-1}|x(n)| + |x(n) + y(n)|^{p-1}|y(n)|, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

implica

$$(2.1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |x(n) + y(n)|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x(n) + y(n)|^{p-1}|x(n)| + \sum_{n=1}^{\infty} |x(n) + y(n)|^{p-1}|y(n)|.$$

Ya que $x + y \in \ell_p$ implica $\{|x(n) + y(n)|^{p-1}\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_{p/(p-1)}$ y puesto que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{\frac{p}{p-1}} = \frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1,$$

se siguen de la desigualdad de Hölder:

$$(2.2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |x(n) + y(n)|^{p-1}|x(n)| \leq \mathcal{N}_p(x) \mathcal{N}_{p/(p-1)} \left(\{|x(n) + y(n)|^{p-1}\}_{n=1}^{\infty} \right),$$

$$(2.3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |x(n) + y(n)|^{p-1}|y(n)| \leq \mathcal{N}_p(y) \mathcal{N}_{p/(p-1)} \left(\{|x(n) + y(n)|^{p-1}\}_{n=1}^{\infty} \right),$$

donde

$$(2.4) \quad \mathcal{N}_{p/(p-1)} \left(\{|x(n) + y(n)|^{p-1}\}_{n=1}^{\infty} \right) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left| |x(n) + y(n)|^{p-1} \right|^{p/(p-1)} \right]^{\frac{1}{p/(p-1)}} \\ = \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x(n) + y(n)|^p \right]^{(p-1)/p} = \mathcal{N}_p(x + y)^{p-1}.$$

Se sigue de (2.1)-(2.4) que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x(n) + y(n)|^p \leq [\mathcal{N}_p(x) + \mathcal{N}_p(y)] \mathcal{N}_p(x + y)^{p-1},$$

es decir,

$$\mathcal{N}_p(x + y)^p \leq [\mathcal{N}_p(x) + \mathcal{N}_p(y)] \mathcal{N}_p(x + y)^{p-1}.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{N}_p(x + y) = \mathcal{N}_p(x + y)^{p-(p-1)} \leq \mathcal{N}_p(x) + \mathcal{N}_p(y),$$

por ser $\mathcal{N}_p(x + y)^p > 0$. ■

Aplicando los resultados anteriores al caso particular de sucesiones cuyas entradas se anulan a partir de la $N + 1$ -ésima, se obtiene de inmediato el resultado siguiente.

2.8 Corolario. Para todo $(x_1, \dots, x_N), (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ se cumplen las desigualdades

siguientes:

$$\textbf{i.} \quad \sum_{n=1}^N |x_n y_n| \leq \left[\sum_{n=1}^N |x_n|^p \right]^{1/p} \left[\sum_{n=1}^N |y_n|^q \right]^{1/q}, \quad \forall p, q \in]1, \infty[, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

$$\textbf{ii.} \quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p \right]^{1/p} \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right]^{1/p} + \left[\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p \right]^{1/p}, \quad \forall p \in [1, \infty[.$$

$$\textbf{iii.} \quad \sum_{n=1}^N |x_n y_n| \leq \left[\sum_{n=1}^N |x_n| \right] \left[\max_{1 \leq k \leq N} |y_k| \right].$$

$$\textbf{iv.} \quad \max_{1 \leq k \leq N} |x_n + y_n| \leq \max_{1 \leq k \leq N} |x_n| + \max_{1 \leq k \leq N} |y_n|.$$

2.11 Ejemplo. (Espacio finito dimensional.) Como consecuencia inmediata del Corolario 2.8 se tiene que, para $1 \leq p < \infty$, la función $\mathcal{N}_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\mathcal{N}_p(x) = \left[\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right]^{1/p}, \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

es una norma sobre $\mathbb{R}^n$, la distancia inducida por esta norma es la función $\rho_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$\rho_p(x, y) = \left[\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p \right]^{1/p}, \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

También, que la función $\mathcal{N}_\infty : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\mathcal{N}_\infty(x) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|, \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

es una norma sobre $\mathbb{R}^n$, la distancia inducida por esta norma es la función $\rho_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$\rho_\infty(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|, \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n. \quad \blacktriangleleft$$

2.12 Ejemplo. (Espacio de sucesiones reales.) Se sigue de inmediato de la Proposición 2.4, el Lema 2.5 y de las desigualdades de Hölder y Minkowski que, para $1 \leq p < \infty$, el conjunto ℓ_p es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$ y que la función $\mathcal{N}_p : \ell_p \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\mathcal{N}_p(x) = \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p \right]^{1/p}, \quad \forall x \in \ell_p,$$

es una norma sobre ℓ_p , la distancia inducida por esta norma es la función $\rho_p : \ell_p \times \ell_p \rightarrow \mathbb{R}$

definida como

$$\rho_p(x, y) = \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x(k) - y(k)|^p \right]^{1/p}, \quad \forall x, y \in \ell_p.$$

También, que el conjunto ℓ_∞ es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$ y que la función $\mathcal{N}_\infty : \ell_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\mathcal{N}_\infty(x) = \sup_{k \geq 1} |x(k)|, \quad \forall x \in \ell_\infty,$$

es una norma sobre ℓ_∞ , la distancia inducida por esta norma es la función $\rho_\infty : \ell_\infty \times \ell_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$\rho_\infty(x, y) = \sup_{k \geq 1} |x(k) - y(k)|, \quad \forall x, y \in \ell_\infty. \quad \blacktriangleleft$$

2.13 Ejemplo. (Espacio de funciones continuas.) Denote por $\mathcal{C}([a, b])$ el espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$ de todas las funciones continuas del intervalo compacto $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Para cada $1 \leq p < \infty$, se define la función $\mathcal{N}_p : \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\mathcal{N}_p(f) = \left[\int_a^b |f(t)|^p dt \right]^{1/p}, \quad \forall f \in \mathcal{C}([a, b]).$$

El lector puede verificar por su cuenta (Ejercicio) que la Proposición 2.4, el Lema 2.5 y las desigualdades de Hölder y Minkowski son válidas al reemplazar los $x(n)$ por $f(t)$ y los símbolos de sumatoria por el de integral. Luego, $\mathcal{N}_p$ es una norma sobre $\mathcal{C}([a, b])$. La distancia inducida por esta norma es la función $\rho_p : \mathcal{C}([a, b]) \times \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\rho_p(f, g) = \left[\int_a^b |f(t) - g(t)|^p dt \right]^{1/p}, \quad \forall f, g \in \mathcal{C}([a, b]).$$

También se define la función $\mathcal{N}_\infty : \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\mathcal{N}_\infty(f) = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|, \quad \forall f \in \mathcal{C}([a, b]).$$

Se verifica fácilmente (Ejercicio) que $\mathcal{N}_\infty$ es una norma sobre $\mathcal{C}([a, b])$, llamada la **norma uniforme**. La distancia inducida por esta norma es la función $\rho_\infty : \mathcal{C}([a, b]) \times \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\rho_\infty(f, g) = \sup_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|, \quad \forall f, g \in \mathcal{C}([a, b]). \quad \blacktriangleleft$$

2.14 Ejemplo. Si d y d' son dos métricas sobre un mismo conjunto X y $1 \leq p < \infty$, se

sigue del Corolario 2.8 (Ejercicio) que la función $d_p : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d_p(x, y) = [d(x, y)^p + d'(x, y)^p]^{1/p}, \quad \forall x, y \in X,$$

es una métrica sobre X . Del mismo modo, la función $d_\infty : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d_\infty(x, y) = \max\{d(x, y), d'(x, y)\}, \quad \forall x, y \in X,$$

es una métrica sobre X . Se verá más adelante que estas métricas son todas equivalentes. ◀

2.15 Ejemplo. Si (X, d_X) y (Y, d_Y) son dos espacios métricos y $1 \leq p < \infty$, se sigue también del Corolario 2.8 (Ejercicio) que la función

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = [d_X(x_1, x_2)^p + d_Y(y_1, y_2)^p]^{1/p}, \quad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y,$$

es una métrica sobre $X \times Y$, la cual (se verá) es equivalente a la métrica definida en el Ejemplo 2.7. ◀

2.2. Topología de espacios métricos

Asociada de manera natural al concepto de distancia se encuentra la noción de aproximación, la cual entraña, a su vez, los conceptos de vecindad (o entorno) y límite, entre otros. En esta sección se analizarán en detalle este tipo de conceptos, los cuales generan en cierta forma la llamada topología de dichos espacios.

En lo sucesivo se supondrá que X es un conjunto provisto de una métrica d (a menos que se especifique lo contrario).

2.16 Definición. Una **bola abierta** de centro $a \in X$ y radio $r > 0$ en X es el conjunto

$$B(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) < r\}.$$

Una **bola cerrada** de centro $a \in X$ y radio $r \geq 0$ en X es el conjunto

$$B'(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) \leq r\}.$$

Una **esfera** de centro $a \in X$ y radio $r \geq 0$ en X es el conjunto

$$S(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) = r\}.$$

2.17 Ejemplo. En $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $\forall a \in \mathbb{R}$ y $\forall r > 0$, se tiene

$$B(a, r) =]a - r, a + r[, \quad B'(a, r) = [a - r, a + r] \quad \text{y} \quad S(a, r) = \{a - r, a + r\}. \quad \blacktriangleleft$$

2.18 Ejemplo. En $\overline{\mathbb{R}}$ provisto de la métrica d dada en el Ejemplo 2.6, se verifica de inmediato (Ejercicio) que, $\forall a \in \overline{\mathbb{R}}$ y $\forall r > 0$, se tiene

$$\begin{aligned} B(a, r) &= f^{-1} (]f(a) - r, f(a) + r[\cap [-1, 1]) , \\ B'(a, r) &= f^{-1} ([f(a) - r, f(a) + r] \cap [-1, 1]) , \\ S(a, r) &= f^{-1} (\{f(a) - r, f(a) + r\} \cap [-1, 1]) . \end{aligned}$$

Debido a que f y f^{-1} son funciones continuas y estrictamente crecientes, se observa que para cualquier $a \in \mathbb{R}$, la bola abierta $B(a, r)$ es un intervalo abierto $]c, d[$, con $c, d \in \mathbb{R}$ que contiene a a y tal que su longitud en $\mathbb{R}$, es decir, $d - c$, tiende a cero, cuando $r \rightarrow 0$. Para $a = \infty$, la bola abierta $B(\infty, r)$ es intervalo de la forma $]M, \infty]$, con $M \in \mathbb{R}$, tal que su extremo izquierdo M tiende a ∞ , cuando $r \rightarrow 0$. Finalmente, para $a = -\infty$, la bola abierta $B(-\infty, r)$ es intervalo de la forma $[-\infty, m[$, con $m \in \mathbb{R}$, tal que su extremo derecho m tiende a $-\infty$, cuando $r \rightarrow 0$. ◀

2.19 Ejemplo. Si d es la métrica discreta sobre X , es claro (Ejercicio) que, $\forall a \in X$, se tiene

$$\begin{aligned} B(a, r) &= \begin{cases} \{a\} & \text{si } 0 < r \leq 1, \\ X & \text{si } r > 1, \end{cases} & B'(a, r) &= \begin{cases} \{a\} & \text{si } 0 \leq r < 1, \\ X & \text{si } r \geq 1, \end{cases} \\ & & \text{y} & S(a, r) = \begin{cases} \{a\} & \text{si } r = 0, \\ X \setminus \{a\} & \text{si } r = 1, \\ \emptyset & \text{si } r > 1. \end{cases} \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

2.20 Definición. La bola unitaria y la bola unitaria cerrada de un espacio normado $(E, \mathcal{N})$ se definen como los conjuntos

$$B(0, 1) = \{x \in E \mid \mathcal{N}(x) < 1\} \quad \text{y} \quad B'(0, 1) = \{x \in E \mid \mathcal{N}(x) \leq 1\},$$

respectivamente.

2.21 Ejemplo. En $(\mathbb{R}^2, \mathcal{N}_1)$, $(\mathbb{R}^2, \mathcal{N}_2)$ y $(\mathbb{R}^2, \mathcal{N}_\infty)$ las respectivas bolas unitarias son los

conjuntos que se muestran en las Figuras 2.2 y 2.3.

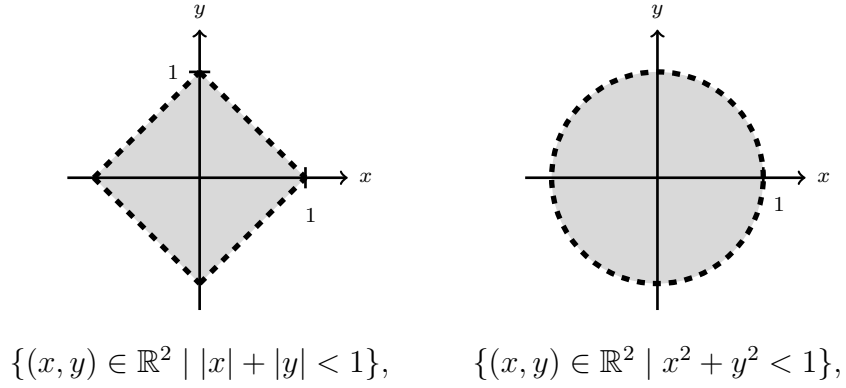


Figura 2.2

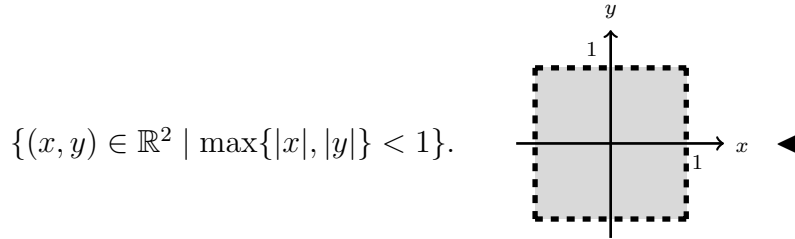
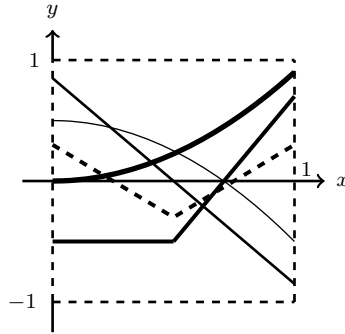


Figura 2.3

2.22 Ejemplo. La bola unitaria de $(\mathcal{C}([0, 1]), \mathcal{N}_\infty)$ se bosqueja en la Figura 2.4.



$$\{f \in \mathcal{C}([0, 1]) \mid |f(t)| < 1, \forall t \in [0, 1]\} \blacktriangleleft$$

Figura 2.4

Conjuntos abiertos y cerrados

2.23 Definición. Se dice que un subconjunto G de X es un **conjunto abierto** si para cada $a \in G$ existe $r > 0$ tal que la bola abierta $B(a, r)$ está contenida en G .

2.24 Ejemplo. En cualquier espacio métrico (X, d) , los conjuntos $\emptyset$, X , $B(a, r)$ y $\{x \in X \mid d(x, a) > r\}$, $\forall a \in X$ y $\forall r > 0$, son todos conjuntos abiertos. En $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, el conjunto $\{0\}$ no es abierto.

En efecto, claramente $\emptyset$ y X satisfacen la definición anterior. Sea ahora $b \in B(a, r)$. Si $\rho = r - d(b, a) > 0$, es fácil ver (Ejercicio) que $B(b, \rho) \subset B(a, r)$. Luego, $B(a, r)$ es un conjunto abierto en X . De manera similar se demuestra (Ejercicio) que el conjunto $\{x \in X \mid d(x, a) > r\}$ es abierto. Por último, en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $B(0, r) =]-r, r[\not\subset \{0\}$, $\forall r > 0$, implica que $\{0\}$ no es un conjunto abierto. ◀

A continuación se analizarán algunas propiedades de cerradura para la familia de conjuntos abiertos.

2.25 Definición. Una familia no vacía $\mathcal{T}$ de subconjuntos de un conjunto X se dice que es una **topología** sobre X si se cumplen las condiciones siguientes.

- i. La unión de cualquier subfamilia de $\mathcal{T}$ es un elemento de $\mathcal{T}$, es decir, $\mathcal{T}$ es cerrada bajo uniones arbitrarias.
- ii. La intersección de cualquier subfamilia finita de elementos de $\mathcal{T}$ es un elemento de $\mathcal{T}$, es decir, $\mathcal{T}$ es cerrada bajo intersecciones finitas.

Al par $(X, \mathcal{T})$ se le llama **espacio topológico** y a los elementos de $\mathcal{T}$, conjuntos abiertos.

Por convención, la condición (i) implica que $\emptyset \in \mathcal{T}$, pues $\emptyset$ se puede entender como la unión de una subfamilia vacía de elementos de $\mathcal{T}$. Así mismo, la condición (ii) implica que $X \in \mathcal{T}$, pues X se puede interpretar como la intersección de una subfamilia vacía de elementos de $\mathcal{T}$. En esta forma, ambos conjuntos $\emptyset$ y X siempre deben pertenecer a $\mathcal{T}$.

2.9 Teorema. La familia $\mathcal{T}$ formada por todos los conjuntos abiertos de un espacio métrico (X, d) (cf. Definición 2.23) es una topología sobre X , llamada la **topología inducida por la métrica d** .

Demostración. (a). Considere una familia no vacía $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de elementos de $\mathcal{T}$ y

sea

$$G = \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha.$$

Fije $a \in G$. Existe pues $\alpha \in A$ tal que $a \in G_\alpha$. Como G_α es abierto, por la Definición 2.23 existe $r > 0$ tal que

$$B(a, r) \subset G_\alpha \subset G.$$

De acuerdo a la Definición 2.23, G debe ser un conjunto abierto en (X, d) , es decir, $G \in \mathcal{T}$.

(b). Considere ahora una subfamilia finita no vacía $\{G_k\}_{k=1}^n$ de $\mathcal{T}$ y sea

$$G = \bigcap_{k=1}^n G_k.$$

Fije $a \in G$. Entonces $a \in G_k$, $k = 1, \dots, n$. Por la Definición 2.23 para cada k existe $r_k > 0$ tal que $B(a, r_k) \subset G_k$. Si $r = \min\{r_1, \dots, r_n\}$, entonces $r > 0$ y $B(a, r) \subset B(a, r_k) \subset G_k$, $k = 1, \dots, n$. Por lo tanto,

$$B(a, r) \subset \bigcap_{k=1}^n G_k = G.$$

De acuerdo a la Definición 2.23, G debe ser un conjunto abierto en (X, d) , es decir, $G \in \mathcal{T}$.

Lo anterior prueba que $\mathcal{T}$ es una topología sobre X . ■

Observe que una topología $\mathcal{T}$ sobre un conjunto X no necesariamente es cerrada bajo intersecciones arbitrarias. Por ejemplo, en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ se tiene que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B(0, 1/n) = \{0\}$$

el cual, como se vio en el Ejemplo 2.24, no es un conjunto abierto.

2.26 Ejemplo. En un espacio métrico discreto (X, d) cualquier subconjunto de X es un conjunto abierto.

En efecto, sea A un subconjunto arbitrario de X . Ya se sabe que si $A = \emptyset$, entonces A es un conjunto abierto. Suponga entonces que $A \neq \emptyset$. Recuerde que si $a \in X$ y $0 < r \leq 1$, entonces $B(a, r) = \{a\}$ (vea el Ejemplo 2.17). También se sabe que cualquier bola abierta en un espacio métrico arbitrario es un conjunto abierto (vea el Ejemplo 2.24). El Teorema 2.9

implica entonces que

$$A = \bigcup_{a \in A} \{a\} = \bigcup_{a \in A} B(a, 1/2)$$

es un conjunto abierto. ◀

La topología sobre algún conjunto puede ser formulada alternativamente mediante el concepto de vecindad.

2.27 Definición. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Se dice que un conjunto V es una **vecindad** de un punto $x \in X$ si existe $G \in \mathcal{T}$ tal que

$$x \in G \subset V.$$

Se denotará por $\mathcal{V}(x)$ a la familia de todas las vecindades de un punto $x \in X$. En el caso de ser (X, d) un espacio métrico, esto equivale a decir que existe $r > 0$ tal que

$$B(x, r) \subset V.$$

Se sigue de inmediato (Ejercicio) de las Definiciones 2.23 y 2.27 el resultado siguiente.

2.10 Proposición. Un subconjunto V de un espacio métrico X es un conjunto abierto si y sólo si V es vecindad de cada uno de sus puntos.

2.28 Observación. Se deja como ejercicio para el lector la verificación de las propiedades siguientes de la familia de vecindades $\mathcal{V}(x)$ de un punto $x \in X$.

- i. Todo subconjunto de X que contenga a algún elemento de $\mathcal{V}(x)$ es un elemento de $\mathcal{V}(x)$.
- ii. La familia $\mathcal{V}(x)$ es cerrada bajo intersecciones finitas.
- iii. Todo elemento de $\mathcal{V}(x)$ incluye a x entre sus elementos.
- iv. Para todo $V \in \mathcal{V}(x)$ existe $W \in \mathcal{V}(x)$ tal que

$$y \in W \implies V \in \mathcal{V}(y). \triangleleft$$

2.29 Ejemplo. Considere el sistema ampliado de los números reales $\overline{\mathbb{R}}$ provisto de la métrica d definida en el Ejemplo 2.6. De acuerdo al Ejemplo 2.18, el sistema de vecindades de un punto $a \in \overline{\mathbb{R}}$ queda descrito de la manera siguiente.

- i. Si $a \in \mathbb{R}$, entonces las vecindades de a en $\overline{\mathbb{R}}$ son subconjuntos V de $\overline{\mathbb{R}}$ para los

cuales existe un intervalo abierto $]c, d[$, con $c, d \in \mathbb{R}$, que contiene a a . En particular, los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que son abiertos en $\overline{\mathbb{R}}$ son los mismos que los conjuntos abiertos en $\mathbb{R}$ con la distancia usual.

ii. Las vecindades de $a = \infty$ son subconjuntos V de $\overline{\mathbb{R}}$ que contienen a un intervalo de la forma $]M, \infty]$, para algún $M \in \mathbb{R}$.

iii. Las vecindades de $a = -\infty$ son subconjuntos V de $\overline{\mathbb{R}}$ que contienen a un intervalo de la forma $[-\infty, m[$, para algún $m \in \mathbb{R}$.

Lo anterior es equivalente a decir (vea la Proposición 2.10) que un subconjunto G de $\overline{\mathbb{R}}$ es abierto si y sólo si se cumple lo siguiente.

i. Si $a \in G \cap \mathbb{R}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset G$ (en particular, los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que son abiertos en $\overline{\mathbb{R}}$ son los mismos que los conjuntos abiertos en $\mathbb{R}$ con la distancia usual).

ii. Si $\infty \in G$, existe $M > 0$ tal que $]M, \infty] \subset G$.

iii. Si $-\infty \in G$, existe $m < 0$ tal que $[-\infty, m[\subset G$. ◀

2.30 Definición. Un subconjunto A de un espacio métrico (X, d) se dice que es un **conjunto cerrado** si su complemento $\complement A$ es un conjunto abierto en X .

2.31 Ejemplo. En cualquier espacio métrico (X, d) , los conjuntos $\emptyset$, X , $B'(a, r)$ y $\{x \in X \mid d(x, a) \geq r\}$, $\forall a \in X$ y $\forall r \geq 0$, son todos conjuntos cerrados. En $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, el conjunto $\{0\}$ es cerrado.

En efecto, la primera parte se sigue de inmediato del Ejemplo 2.24. Para la segunda parte, observe que $\{0\} = B'(0, 0)$. ◀

2.32 Ejemplo. En un espacio métrico discreto (X, d) cualquier subconjunto de X es un conjunto cerrado. Esto se sigue sin más del Ejemplo 2.26. ◀

2.33 Observación. Se siguen del Teorema 2.9 y de las Leyes de De Morgan¹ (Ejercicio) las

¹Leyes de De Morgan:

$$\complement \left(\bigcup_{\alpha \in \Omega} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in \Omega} \complement A_\alpha \quad \text{y} \quad \complement \left(\bigcap_{\alpha \in \Omega} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in \Omega} \complement A_\alpha$$

donde $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ es una familia arbitraria de subconjuntos de algún conjunto X .

propiedades siguientes de la familia de conjuntos cerrados en un espacio métrico X :

- i. La intersección de cualquier colección de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado, es decir, la familia de conjuntos cerrados es cerrada bajo intersecciones arbitrarias.
- ii. La unión de cualquier colección finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado, es decir, la familia de conjuntos cerrados es cerrada bajo uniones finitas. $\triangleleft$

Otros conceptos topológicos

2.34 Definición. Sea A un subconjunto de un espacio métrico X . Se define el **interior** de A , denotado por A° , como la unión de todos los conjuntos abiertos de X que están contenidos en A , es decir, A° es el conjunto abierto más grande que cabe dentro de A . Los elementos de A° se llaman **puntos interiores** de A .

2.11 Proposición. Sean A y B dos subconjuntos de un espacio métrico X y sea $x \in X$. El interior de un conjunto tiene las propiedades siguientes.

- i. A° es un conjunto abierto.
- ii. $A^\circ \subset A$.
- iii. $A^\circ = A$ si y sólo si A es un conjunto abierto.
- iv. $A^{\circ\circ} = A^\circ$.
- v. $x \in A^\circ$ si y sólo si $A \in \mathcal{V}(x)$ si y sólo si existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$.
- vi. $A \subset B$ implica $A^\circ \subset B^\circ$.
- vii. $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

Demostración. La verificación de las propiedades (i)-(vi) es inmediata de la definición (Ejercicio). Para probar (vii) observe que $A^\circ \cap B^\circ$ es un conjunto abierto que está contenido en $A \cap B$, luego

$$(2.5) \quad A^\circ \cap B^\circ \subset (A \cap B)^\circ,$$

por definición de interior. Recíprocamente, fije $x \in (A \cap B)^\circ$. Entonces existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A \cap B$, luego $B(x, r) \subset A$ y $B(x, r) \subset B$. Por (v), $x \in A^\circ$ y $x \in B^\circ$, es decir, $x \in A^\circ \cap B^\circ$. Por lo tanto,

$$(2.6) \quad (A \cap B)^\circ \subset A^\circ \cap B^\circ,$$

Se sigue de (2.5) y (2.6) que $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$. ■

2.35 Ejemplo. El interior de la bola unitaria cerrada $B'(0, 1)$ en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{N}_2)$ es la bola abierta $B(0, 1)$.

En efecto, como la bola abierta $B(0, 1)$ es un conjunto abierto contenido en $B'(0, 1)$, entonces

$$B(0, 1) \subset B'(0, 1)^\circ.$$

Para probar la otra contención se fija $x \notin B(0, 1)$ y se demuestra que $x \notin B'(0, 1)^\circ$. Se tiene que $x \notin B(0, 1)$ implica que $\mathcal{N}_2(x) \geq 1$. Se probará que $B(x, r) \not\subset B'(0, 1)$, $\forall r > 0$, es decir, que x no es un punto interior de $B'(0, 1)$. Sea pues $r > 0$ arbitrario. El punto

$$y = x + \frac{r/2}{\mathcal{N}_2(x)}x = \left(1 + \frac{r/2}{\mathcal{N}_2(x)}\right)x$$

pertenece a $B(x, r)$ pero no pertenece a $B'(0, 1)$ (Haga un dibujo), pues

$$\mathcal{N}_2(y - x) = \mathcal{N}_2\left(\frac{r/2}{\mathcal{N}_2(x)}x\right) = \frac{r/2}{\mathcal{N}_2(x)}\mathcal{N}_2(x) = \frac{r}{2} < r$$

y

$$\mathcal{N}_2(y) = \left(1 + \frac{r/2}{\mathcal{N}_2(x)}\right)\mathcal{N}_2(x) = \mathcal{N}_2(x) + \frac{r}{2} > \mathcal{N}_2(x) \geq 1.$$

Luego, $x \notin B'(0, 1)$. Así pues,

$$B'(0, 1)^\circ \subset B(0, 1).$$

Por lo tanto $B'(0, 1)^\circ = B(0, 1)$. ◀

2.36 Definición. Sea A un subconjunto de un espacio métrico X . Se define el **exterior** de A , denotado por $\text{Ext } A$, como el interior del complemento de A , es decir,

$$\text{Ext } A = (\mathbb{C} A)^\circ.$$

Los elementos de $\text{Ext } A$ se llaman **puntos exteriores** de A .

2.37 Definición. Sea A un subconjunto de un espacio métrico X . Se define la **adherencia** o **cerradura** de A , denotada por $\overline{A}$, como la intersección de todos los conjuntos cerrados de X que contienen a A , es decir, $\overline{A}$ es el conjunto cerrado más pequeño en el que cabe A . Los elementos de $\overline{A}$ se llaman **puntos adherentes** de A o **puntos de la cerradura** de A .

La demostración del resultado siguiente, que es el análogo a la Proposición 2.11, se obtiene inmediatamente de la definición (Ejercicio).

2.12 Proposición. Sean A y B dos subconjuntos de un espacio métrico X y sea $x \in X$. La adherencia de un conjunto tiene las propiedades siguientes.

- i. $\bar{A}$ es un conjunto cerrado.
- ii. $A \subset \bar{A}$.
- iii. $\bar{A} = A$ si y sólo si A es un conjunto cerrado.
- iv. $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$.
- v. $A \subset B$ implica $\bar{A} \subset \bar{B}$.

2.13 Teorema. (Dualidad entre interior y adherencia.) Si A es un subconjunto de un espacio métrico X , entonces

$$\mathbb{C}\bar{A} = (\mathbb{C}A)^\circ = \text{Ext } A \quad \text{y} \quad \mathbb{C}A^\circ = \overline{\mathbb{C}A}.$$

Demostración. Para probar la primera igualdad observe que $\bar{A}$ es un conjunto cerrado que contiene a A , luego $\mathbb{C}\bar{A}$ es un conjunto abierto contenido en $\mathbb{C}A$. Así pues,

$$(2.7) \quad \mathbb{C}\bar{A} \subset (\mathbb{C}A)^\circ.$$

Por otra parte, $(\mathbb{C}A)^\circ$ es un conjunto abierto contenido en $\mathbb{C}A$, luego $\mathbb{C}(\mathbb{C}A)^\circ$ es un conjunto cerrado que contiene a A . Así pues, $\mathbb{C}(\mathbb{C}A)^\circ$ contiene a $\bar{A}$, equivalentemente,

$$(2.8) \quad (\mathbb{C}A)^\circ \subset \mathbb{C}\bar{A}.$$

Se sigue pues de (2.7) y (2.8) que $\mathbb{C}\bar{A} = (\mathbb{C}A)^\circ = \text{Ext } A$, que es la primera identidad.

Para probar la segunda identidad, aplique la primera igualdad a $\mathbb{C}A$ en lugar de A . Resulta,

$$\mathbb{C}\overline{\mathbb{C}A} = (\mathbb{C}\mathbb{C}A)^\circ = A^\circ,$$

o sea, $\overline{\mathbb{C}A} = \mathbb{C}A^\circ$, que es la segunda identidad. ■

2.14 Corolario. Sea A un subconjunto de un espacio métrico X y sea $x \in X$. Se tiene que

$$x \in \bar{A} \quad \text{si y sólo si} \quad B(x, r) \cap A \neq \emptyset, \quad \forall r > 0,$$

equivalentemente, $V \cap A \neq \emptyset, \forall V \in \mathcal{V}(x)$.

Demostración. Por el Teorema 2.13 se tiene que $x \in \bar{A}$ si y sólo si $x \notin \text{Ext } A$ si y sólo si $B(x, r) \not\subset \complement A, \forall r > 0$, si y sólo si $B(x, r) \cap A \neq \emptyset, \forall r > 0$. ■

2.15 Corolario. Si A y B son dos subconjuntos de un espacio métrico X , entonces

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

Demostración. Por la dualidad entre interior y adherencia, las Leyes de De Morgan y la Proposición 2.11, parte (vii), se tiene

$$\complement \overline{A \cup B} = (\complement(A \cup B))^{\circ} = (\complement A \cap \complement B)^{\circ} = (\complement A)^{\circ} \cap (\complement B)^{\circ} = \complement \bar{A} \cap \complement \bar{B} = \complement(\bar{A} \cup \bar{B}),$$

es decir, $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$. ■

En espacios métricos es posible dar una útil caracterización de punto adherente mediante sucesiones.

2.38 Definición. Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de un espacio métrico **converge** a un elemento x de X si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad d(x_n, x) < \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

A x se le llama el **límite** de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y se escribe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Se deja a cuidado del lector verificar la equivalencia de los enunciados siguientes:

- i. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.
- ii. La sucesión de las distancias $\{d(x_n, x)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a cero en $\mathbb{R}$ con la distancia usual, es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0,$$

esto significa que x_n se va “aproximando” a x cada vez más conforme n tiende a ∞ .

- iii. $\forall \varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(x, \varepsilon), \forall n \geq N$, es decir, el conjunto $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in B(x, \varepsilon)\}$ es finito.

- iv. $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V, \forall n \geq N$, es decir, el conjunto $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in V\}$ es finito.

2.39 Definición. Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un espacio métrico X se dice que es **conver-**

gente si converge a algún elemento de X .

La verificación de que una sucesión convergente tiene un único límite se basa en la siguiente propiedad general de los espacio métricos.

2.16 Teorema. (Teorema de separación.) Si x y y son dos puntos distintos de un espacio métrico X , entonces existen vecindades $U \in \mathcal{V}(x)$ y $V \in \mathcal{V}(y)$ tales que $U \cap V = \emptyset$, o sea, que los puntos x y y quedan “separados” por sendas vecindades U y V .

Demostración. Como $x \neq y$, entonces $d(x, y) > 0$, luego $r = d(x, y)/2 > 0$. Si existiera algún $z \in B(x, r) \cap B(y, r)$, se tendría

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < r + r = d(x, y)$$

lo cual sería absurdo. Por lo tanto, $B(x, r) \cap B(y, r) = \emptyset$. Basta tomar (Ejercicio) $U = B(x, r)$ y $V = B(y, r)$. ■

Se deja como ejercicio para el lector probar los dos resultados siguientes.

2.17 Corolario. Toda sucesión convergente en un espacio métrico converge a lo más a un límite.

2.18 Proposición. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio métrico X y sea $x \in X$. Entonces $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x si y sólo si toda subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x .

2.40 Ejemplo. En $(\mathbb{R}^2, \mathcal{N}_{\infty})$, una sucesión $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si y sólo si las sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen a x y y en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, respectivamente. En efecto, esto se sigue directamente (Ejercicio) de las desigualdades

$$|x|, |y| \leq \max\{|x|, |y|\} = \mathcal{N}_{\infty}(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

El lector puede verificar como ejercicio que esto mismo se cumple si en lugar de la norma $\mathcal{N}_{\infty}$ se considera cualquiera de las normas $\mathcal{N}_p$, $1 \leq p \leq \infty$, es decir, la sucesión de vectores converge a algún vector límite si y sólo si las sucesiones de las componentes convergen a las respectivas componentes del vector límite. Lo anterior también se generaliza de inmediato (Ejercicio) a $\mathbb{R}^N$. ◀

2.19 Teorema. Sea A un subconjunto de un espacio métrico X y sea $x \in X$. Entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en A que converge a x .

Demostración. (a). Suponga primero que $x \in \bar{A}$. Por el Corolario 2.14, $B(x, 1/n) \cap A \neq \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tome un $x_n \in A \cap B(x, 1/n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces $x_n \in A$ y $d(x_n, x) < 1/n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, en particular,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0.$$

Así pues, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en A que converge a x (vea el párrafo siguiente a la Definición 2.39).

(b). Suponga ahora que existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en A que converge a x . Dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(x, \varepsilon)$, $\forall n \geq N$. En particular,

$$B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Por el Corolario 2.14, se concluye que $x \in \bar{A}$. ■

2.20 Teorema. *Un subconjunto A de un espacio métrico X es un conjunto cerrado si y sólo si cualquier sucesión de puntos de A que sea convergente en X converge a un punto de A .*

Demostración. (a). Suponga que A sea cerrado. Por la Proposición 2.12, parte (iii), se debe tener que $\bar{A} = A$. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en A que converja a algún punto $x \in X$. Se debe probar que $x \in A$. El Teorema 2.19 asegura que $x \in \bar{A}$, es decir, que $x \in A$.

(b). Suponga ahora que se cumpla la condición. Hay que probar que $\bar{A} = A$. Ya se sabe que $A \subset \bar{A}$. Fije ahora $x \in \bar{A}$. Por el Teorema 2.19, existe una sucesión en A que converge a x , pero por hipótesis $x \in A$. Por lo tanto, $\bar{A} = A$. ■

2.41 Ejemplo. El conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x^2\}$$

(Haga un bosquejo de A) es cerrado en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{N}_{\infty})$.

En efecto, sea $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión arbitraria en A que converge a algún punto (x, y) en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{N}_{\infty})$. Por lo dicho en el Ejemplo 2.40,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y.$$

Como $(x_n, y_n) \in A$, es decir, $y_n \leq x_n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = x^2.$$

Esto prueba que $(x, y) \in A$. De acuerdo al Teorema 2.20, el conjunto A debe ser cerrado en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{N}_\infty)$.

Siguiendo un procedimiento similar al anterior se puede demostrar (Ejercicio), por ejemplo, que es cerrado el conjunto

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = 1/x\}$$

pero que no es cerrado el conjunto

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, 0 \leq y < 1/x\},$$

ambos en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{N}_\infty)$. ◀

2.42 Definición. Sea A un subconjunto de un espacio métrico X . Se define la **frontera** de A , denotada por $Fr A$, como el conjunto

$$Fr A = \overline{A} \cap \overline{\mathbb{C} A}.$$

Los elementos de $Fr A$ se llaman **puntos frontera** de A .

2.21 Proposición. Sea A un subconjunto de un espacio métrico X y sea $x \in X$. La frontera de un conjunto tiene las propiedades siguientes.

- i. $Fr A$ es un conjunto cerrado.
- ii. $x \in Fr A$ si y sólo si $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, se tiene

$$V \cap A \neq \emptyset \quad \text{y} \quad V \cap \mathbb{C} A \neq \emptyset,$$

equivalentemente, $\forall r > 0$, se tiene

$$B(x, r) \cap A \neq \emptyset \quad \text{y} \quad B(x, r) \cap \mathbb{C} A \neq \emptyset.$$

- iii. $A^\circ \cup Fr A \cup Ext A = X$ y los conjuntos A° , $Fr A$ y $Ext A$ son disjuntos.
- iv. $A^\circ \cup Fr A = \overline{A}$ y $A \cup Fr A = \overline{A}$.
- v. A es un conjunto abierto si y sólo si

$$A \cap Fr A = \emptyset$$

y A es un conjunto cerrado si y sólo si

$$Fr A \subset A.$$

Demostración. Sólo se demostrará (iv), el resto se deja como ejercicio para el lector.

De acuerdo a (iii) y la dualidad entre interior y adherencia,

$$A^\circ \cup \text{Fr } A = \mathbb{C} \text{Ext } A = \mathbb{C} (\mathbb{C} A)^\circ = \mathbb{C} \mathbb{C} \bar{A} = \bar{A}.$$

Ya que $A^\circ \subset A \subset \bar{A}$, se concluye que

$$A \cup \text{Fr } A = A \cup A^\circ \cup \text{Fr } A = A \cup \bar{A} = \bar{A}. \blacksquare$$

2.43 Ejemplo. Se demuestra fácilmente (Ejercicio) que en $\mathbb{R}$ con la métrica usual,

$$\mathbb{Q}^\circ = \emptyset, \quad \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}, \quad \text{Fr } \mathbb{Q} = \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \text{Ext } \mathbb{Q} = \emptyset.$$

¿Qué se puede decir de $\mathbb{I}$? ◀

2.44 Ejemplo. Se verá más adelante que en cualquier espacio normado $(X, \mathcal{N})$, como $(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}_p)$, $(\ell_p, \mathcal{N}_p)$ o $(\mathcal{C}([a, b]), \mathcal{N}_p)$, $1 \leq p \leq \infty$, si A es una bola con centro a y radio $r > 0$, abierta o cerrada, entonces

A° es la bola abierta correspondiente.

$\bar{A}$ es la bola cerrada correspondiente.

$\text{Fr } A$ es la esfera correspondiente.

$\text{Ext } A$ es el complemento de la bola cerrada correspondiente. ◀

2.45 Ejemplo. Si A es un conjunto arbitrario en un espacio métrico discreto (X, d) , se verifica de inmediato (Ejercicio) que

$$A^\circ = A, \quad \bar{A} = A, \quad \text{Fr } A = \emptyset \quad \text{y} \quad \text{Ext } A = \mathbb{C} A. \quad \blacktriangleleft$$

2.46 Ejemplo. Si A es un subconjunto de $\mathbb{R}$ que no está acotado superiormente (inferiormente), entonces $\infty \in \bar{A}$ ($-\infty \in \bar{A}$) en $\overline{\mathbb{R}}$ (vea el Ejemplo 2.29). En particular, la adherencia de $\mathbb{R}$ en $\overline{\mathbb{R}}$ es $\overline{\mathbb{R}}$ (lo cual justifica la notación empleada). ◀

2.47 Definición. Sean A un subconjunto de un espacio métrico X y $x \in X$. Se dice que x es un **punto de acumulación** de A si toda vecindad de x intersecta a A en algún punto distinto de x , equivalentemente,

$$\forall r > 0, \quad [B(x, r) \setminus \{x\}] \cap A \neq \emptyset.$$

El conjunto de puntos de acumulación de A se denota por A' y se llama el **conjunto derivado**

de A .

Se dice que x es un **punto aislado** de A si existe una vecindad de x cuya intersección con A se reduce a x , equivalentemente, si

$$\exists r > 0, \quad \text{tal que} \quad B(x, r) \cap A = \{x\}.$$

2.48 Observación. Sean A un subconjunto de un espacio métrico X y $x \in X$. El lector puede verificar como ejercicio que se cumplen las afirmaciones siguientes.

- i. $\overline{A} = A \cup A'$.
- ii. x es un punto aislado de A si y sólo si $x \in A$ y x no es punto de acumulación de A .
- iii. x es un punto aislado de X si y sólo si el conjunto $\{x\}$ es abierto en X .
- iv. Los elementos de $\overline{A}$ se clasifican de la siguiente manera:

Los puntos aislados de A .

Los elementos de A que son puntos de acumulación de A .

Los puntos de acumulación de A que no son elementos de A . $\triangleleft$

La siguiente caracterización de punto de acumulación por sucesiones se demuestra de manera similar al Teorema 2.19 (Ejercicio).

2.22 Proposición. Sean A un subconjunto de un espacio métrico X y $x \in X$. Se tiene que x es un punto de acumulación de A si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos distintos de A que converge a x .

2.3. Espacios métricos separables

2.49 Definición. Se dice que un subconjunto A de un espacio métrico X y $x \in X$ es un **conjunto denso** en X si $\overline{A} = X$.

Las siguientes caracterizaciones del concepto de densidad por medio de conjuntos abiertos y sucesiones se siguen fácilmente (Ejercicio) del Corolario 2.14 y del Teorema 2.19.

2.23 Proposición. Sea A un subconjunto de un espacio métrico X . Se cumplen las afirmaciones siguientes.

- i. El conjunto A es denso en X si y sólo si todo conjunto abierto no vacío de X tiene

intersección no vacía con A , equivalentemente,

$$\forall x \in X \quad y \quad \forall r > 0, \quad B(x, r) \cap A \neq \emptyset.$$

ii. El conjunto A es denso en X si y sólo si para cualquier punto x de X existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de A que converge a x .

2.50 Ejemplo. Denote por $\mathbb{Q}^n$ el producto cartesiano de $\mathbb{Q}$ consigo mismo n veces, es decir,

$$\mathbb{Q}^n = \prod_{k=1}^n \mathbb{Q}.$$

Se afirma que $\mathbb{Q}^n$ es denso en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}_p)$, $1 \leq p \leq \infty$. En efecto, dados $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ arbitrarios, se sabe que existen $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Q}$ tales que

$$|x_k - q_k| < \frac{r}{n^{1/p}}, \quad k = 1, \dots, n,$$

donde $n^{1/p} = 1$ si $p = \infty$. Luego, el vector $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Q}^n$ satisface

$$\mathcal{N}_{\infty}(x - q) < r.$$

Esto prueba la afirmación. ◀

2.51 Definición. Se dice que un espacio métrico X es **separable** si posee un subconjunto denso a lo sumo numerable.

2.52 Ejemplo. El espacio normado $(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}_p)$, $1 \leq p \leq \infty$, es separable. En efecto, el conjunto $\mathbb{Q}^n$ es denso y numerable en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}_p)$, $1 \leq p \leq \infty$, (vea el Ejemplo 2.50 y el Ejercicio 1.13). ◀

2.53 Ejemplo. Un espacio métrico discreto X es separable si y sólo si el conjunto X es a lo sumo numerable. Esto se debe a que el único subconjunto denso de X es X mismo, pues, $\forall x \in X$, la bola abierta de centro x y radio $0 < r < 1$ se reduce a $\{x\}$. ◀

2.54 Ejemplo. Se verá más adelante que el espacio normado $(\mathcal{C}([a, b]), \mathcal{N}_p)$, $1 \leq p < \infty$, es separable (un conjunto denso numerable será, por ejemplo, el conjunto de funciones polinomiales de $[a, b]$ en $\mathbb{R}$ con coeficientes racionales). ◀

2.24 Proposición. El espacio normado $(\ell_p, \mathcal{N}_p)$ es separable para $1 \leq p < \infty$.

Demostración. Considere el conjunto

$$D = \{a = \{a(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_p \mid a(n) \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ y } \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } a(n) = 0, \forall n > N\}.$$

Se afirma que D es un subconjunto denso numerable de ℓ_p . En efecto, se tiene que

$$D = \bigcup_{N=1}^{\infty} D_N,$$

donde

$$D_N = \{a = \{a(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_p \mid a(n) \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ y } a(n) = 0, \forall n > N\}.$$

Como D_N es un conjunto numerable (por ser equipotente con $\mathbb{Q}^N$), $\forall N \in \mathbb{N}$, entonces D debe ser un conjunto numerable. Fije ahora $x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$ y sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Ya que $1 \leq p < \infty$, se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty.$$

Así pues, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |x(n)|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Defina la sucesión $a = \{a(n)\}_{n=1}^{\infty}$ como $a(n) = 0, \forall n > N$, y $a(n) \in \mathbb{Q}$ tal que

$$|x(n) - a(n)| < \frac{\varepsilon^p}{2N}, \quad n = 1, \dots, N.$$

Es claro que $a \in \ell_p$ y que

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_p(x - a) &= \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x(n) - a(n)|^p \right]^{1/p} = \left[\sum_{n=1}^N |x(n) - a(n)|^p + \sum_{n=N+1}^{\infty} |x(n)|^p \right]^{1/p} \\ &< \left[\frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} \right]^{1/p} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, D es denso en ℓ_p . ■

2.55 Ejemplo. Los espacios normados $(\ell_{\infty}, \mathcal{N}_{\infty})$ y $(\mathcal{B}([a, b]), \mathcal{N}_{\infty})$ no son separables, porque es posible encontrar un subconjunto infinito no numerable en esos espacios tal que la distancia entre cualquier par de sus elementos sea mayor o igual a uno. Luego ambos espacios no pueden ser separables (Justifique). ◀

2.56 Ejemplo. El sistema ampliado de los números reales $\overline{\mathbb{R}}$ es separable.

En efecto, se afirma que el conjunto numerable

$$D = \mathbb{Q} \cup \{\pm\infty\}$$

es denso en $\overline{\mathbb{R}}$. Para ver esto, considere un conjunto abierto no vacío G en $\overline{\mathbb{R}}$ tal que $\pm\infty \notin G$ (si ∞ o $-\infty$ pertenecen a G , entonces trivialmente $D \cap G \neq \emptyset$). Fije $x \in G$. Se tiene entonces que $x \in \mathbb{R}$ y, de acuerdo al Ejemplo 2.29, debe existir $\varepsilon > 0$ tal que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset G$. Pero se sabe que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$, luego $G \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. ◀

En espacios métricos el concepto de separabilidad puede ser formulado equivalentemente usando bases de la topología del espacio (en espacios topológicos arbitrarios estas dos formulaciones no son equivalentes).

2.57 Definición. Sea $\mathcal{B}$ una familia de conjuntos abiertos en un espacio métrico X . Se dice que $\mathcal{B}$ es una **base** de la topología de X inducida por la métrica si cualquier conjunto abierto puede ser escrito como unión de alguna subfamilia de elementos de $\mathcal{B}$, los conjuntos de $\mathcal{B}$ “generan” pues en el sentido anterior la topología del espacio.

Claramente la topología misma de un espacio métrico es trivialmente una base de dicha topología. Sin embargo, la idea de base queda mejor expresada en los siguientes casos.

2.58 Ejemplo. La familia $\mathcal{B}$ formada por todas las bolas abiertas de radio menor que uno en un espacio métrico X es una base de la topología de X (Ejercicio). Por ejemplo, en un espacio métrico discreto, $\mathcal{B}$ sería

$$\mathcal{B} = \{\{x\} \mid x \in X\}. \quad \blacktriangleleft$$

2.59 Ejemplo. Es fácil probar (Ejercicio) que la familia $\mathcal{B}$ formada por todas las bolas abiertas de la forma $B(a, r)$, donde $a \in \mathbb{Q}^n$ y $r \in \mathbb{Q}^+$, donde $\mathbb{Q}^+$ denota el conjunto de racionales positivos, es una base de la topología de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}_p)$, $1 \leq p \leq \infty$. ◀

2.25 Proposición. Si $\mathcal{B}$ es una base de la topología de un espacio métrico X , entonces existe un conjunto D denso en X tal que $\text{Card } D \leq \text{Card } \mathcal{B}$.

Demostración. Para cada $U \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}$ escoja $x_U \in U$ y defina

$$D = \{x_U \mid U \in \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}\}.$$

Como todo conjunto abierto en X es unión de elementos de $\mathcal{B}$, D debe ser denso en X . Además, $\text{Card } D \leq \text{Card } \mathcal{B}$, pues la función $x : \mathcal{B} \setminus \{\emptyset\} \rightarrow D$, dada por $U \mapsto x_U$, es suprayectiva (vea la Proposición 1.4). ■

2.26 Teorema. *Un espacio métrico es separable si y sólo su topología posee alguna base a lo sumo numerable.*

Demostración. (a). Suponga que la topología de un espacio métrico X posea una base a lo sumo numerable $\mathcal{B}$. Por la Proposición 2.25, existe un conjunto D denso en X tal que

$$\text{Card}(D) \leq \text{Card}(\mathcal{B}) \leq \aleph_0.$$

Luego D es a lo sumo numerable (vea la Proposición 1.2). Por lo tanto X es separable.

(b). Suponga que existe un conjunto D denso a lo sumo numerable en un espacio métrico X . Por el Lema 1.5, D puede ser escrito en la forma $D = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Se afirma que la familia de conjuntos abiertos

$$\mathcal{B} = \{B_{n,k} = B(x_n, 1/(2k)) \mid n, k \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$$

es una base a lo sumo numerable de la topología de X . En efecto, puesto que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable (vea el Ejemplo 1.10) y la función $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{B}$, dada por $(n, k) \mapsto B_{n,k}$ es suprayectiva, se sigue que $\mathcal{B}$ es a lo sumo numerable (vea la Proposición 1.4). Sea ahora G un conjunto abierto no vacío arbitrario de X . Fije $x \in G$. Basta probar (Explique) que existen $n, k \in \mathbb{N}$ tales que

$$x \in B_{n,k} \subset G.$$

Puesto que G es abierto y $x \in G$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $B(x, 1/k) \subset G$. Siendo D denso en X , existe $x_n \in B(x, 1/(2k))$. Entonces la bola abierta $B_{n,k} \in \mathcal{B}$ satisface

$$x \in B_{n,k} \quad \text{y} \quad B_{n,k} \subset B(x, 1/k).$$

En efecto, como $x_n \in B(x, 1/(2k))$, entonces $d(x, x_n) < 1/(2k)$, es decir, $x \in B_{n,k}$. Además, si $y \in B_{n,k}$, entonces

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} = \frac{1}{k},$$

o sea, $y \in B(x, 1/k)$. Así pues, $B_{n,k} \subset B(x, 1/k) \subset G$. ■

Teorema de Lindelöf

El resultado siguiente muestra que de toda cubierta abierta de un espacio métrico separable es posible extraer una subcubierta a lo sumo numerable. Este resultado será clave en el tema de compacidad que será discutido más adelante.

2.27 Teorema. (Teorema de Lindelöf.) *Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ una familia arbitraria de conjuntos abiertos en un espacio métrico separable X y sea*

$$G = \bigcup_{\alpha \in \Omega} G_\alpha.$$

Entonces existe una subfamilia a lo sumo numerable $\{G_{\alpha(n)}\}_{n=1}^\infty$ de $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ tal que

$$G = \bigcup_{n=1}^\infty G_{\alpha(n)}.$$

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una base a lo sumo numerable de la topología de X . Por el Lema 1.5, se puede escribir

$$\mathcal{B} = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Para cada punto $x \in G$ existe $\alpha \in \Omega$ tal que $x \in G_\alpha$ y, por ser $\mathcal{B}$ base, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$(2.9) \quad x \in B_n \subset G_\alpha.$$

Defina

$$\mathcal{B}' = \{B_n \in \mathcal{B} \mid \exists \alpha \in \Omega \text{ tal que } B_n \subset G_\alpha\}.$$

Como $\mathcal{B}'$ es un subconjunto de $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ debe ser también a lo sumo numerable (vea la Proposición 1.2), luego se puede escribir

$$\mathcal{B}' = \{B_{\beta(n)} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

De acuerdo con (2.9) y a la definición de $\mathcal{B}'$, se debe tener

$$G \subset \bigcup_{n=1}^\infty B_{\beta(n)}.$$

Nuevamente por la definición de $\mathcal{B}'$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\alpha(n) \in \Omega$ tal que $B_{\beta(n)} \subset G_{\alpha(n)}$. La familia $\{G_{\alpha(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ es una subfamilia a lo sumo numerable de la familia $\{G_{\alpha}\}_{\alpha \in \Omega}$ tal que

$$G \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{\beta(n)} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{\alpha(n)} \subset \bigcup_{\alpha \in \Omega} G_{\alpha} \subset G,$$

es decir,

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{\alpha(n)}. \blacksquare$$

2.4. Subespacios métricos

2.60 Definición. Si d_X es una métrica sobre un conjunto X y A es cualquier subconjunto de X , entonces la restricción de d_X a A , es decir, la función $d_A = d_X|_{A \times A}$, o sea,

$$d_A(a, b) = d_X|_{A \times A}(a, b), \quad \forall a, b \in A,$$

es claramente (Ejercicio) una métrica sobre A . Al par (A, d_A) se le llama **subespacio métrico** del espacio métrico (X, d_X) . Se escribe indistintamente $d_X = d_A = d$ si no hay peligro de confusión.

Se acostumbra poner subíndice A a los diversos conceptos derivados de la métrica para enfatizar que éstos se están tomando con respecto a la métrica del subespacio A (en caso de no haber ningún subíndice se sobreentenderá que dichos conceptos se derivan de la métrica del espacio X). Por ejemplo, $B_A(a, r)$, $(S^\circ)_A$, $(\overline{S})_A$, etc., denotan la bola abierta de centro a y radio r , el interior de S , la adherencia de S , etc., todos con respecto a la métrica del subespacio A .

2.61 Ejemplo. En el subespacio métrico $([0, 1[, |\cdot|)$ de $\mathbb{R}$, se tiene

$$B_{[0,1[}(a, r) = \{x \in [0, 1[\mid d(x, a) < r\} = \begin{cases}]a - r, a + r[& \text{si } a - r \geq 0 \text{ y } a + r < 1, \\ [0, a + r[& \text{si } a - r < 0 \text{ y } a + r < 1, \\]a - r, 1[& \text{si } a - r \geq 0 \text{ y } a + r \geq 1, \\ [0, 1[& \text{si } a - r < 0 \text{ y } a + r > 1, \end{cases}$$

es decir,

$$B_{[0,1[}(a, r) = B(a, r) \cap [0, 1[=]a - r, a + r[\cap [0, 1[, \quad \forall a \in [0, 1[\text{ y } r > 0.$$

Por ejemplo,

$$B_{[0,1[}(1/2, 1/3) =]1/6, 5/6[, \quad B_{[0,1[}(1/4, 1/2) = [0, 3/4[, \\ B_{[0,1[}(0, 1/4) = [0, 1/4[, \quad \text{y} \quad B_{[0,1[}(3/5, 2) = [0, 1[. \quad \blacktriangleleft$$

Se tienen las siguientes relaciones entre la topología de un subespacio y la topología del espacio subyacente.

2.28 Teorema. Sean A un subconjunto de un espacio métrico X , $a \in A$, $S \subset A$ y $r > 0$. Se cumplen las afirmaciones siguientes.

i. La bola abierta de centro a y radio r en el subespacio métrico A es el conjunto

$$B_A(a, r) = B(a, r) \cap A.$$

ii. Un conjunto $W \subset A$ es una vecindad de a en el subespacio métrico A si y sólo si

$$W = V \cap A,$$

donde V es alguna vecindad de a en X .

iii. La adherencia de S en el subespacio métrico A es el conjunto

$$(\overline{S})_A = \overline{S} \cap A.$$

iv. Un conjunto S es cerrado en el subespacio métrico A si y sólo si

$$S = F \cap A,$$

donde F es algún conjunto cerrado en X . En particular, si A es un conjunto cerrado en X , entonces todo conjunto cerrado en A es un conjunto cerrado en X .

v. Un conjunto S es abierto en el subespacio A si y sólo si

$$S = G \cap A,$$

donde G es algún conjunto abierto en X . En particular, si A es un conjunto abierto en X , entonces todo conjunto abierto en A es un conjunto abierto en X .

Demostración. (i). Se tiene

$$B_A(a, r) = \{x \in A \mid d_A(x, a) < r\} = \{x \in A \mid d_X(x, a) < r\} = B(a, r) \cap A.$$

(ii). Si W es una vecindad de a en el subespacio A , existe $r > 0$ tal que $B_A(a, r) \subset W$, es decir, $B(a, r) \cap A \subset W$, por (i). Si $V = B(a, r) \cup W$, entonces V es una vecindad de a en X tal que

$$\begin{aligned} V \cap A &= [B(a, r) \cup W] \cap A = [B(a, r) \cap A] \cup [W \cap A] \\ &= [B(a, r) \cap A] \cup W = B_A(a, r) \cup W = W, \end{aligned}$$

pues $W \subset A$ y $B_A(a, r) \subset W$.

Si ahora $W = V \cap A$, donde V es una vecindad de a en X , entonces existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset V$. Luego,

$$B_A(a, r) = B(a, r) \cap A \subset V \cap A = W.$$

Así pues, W es una vecindad de a en el subespacio A .

(iii). Se tiene que $x \in (\bar{S})_A$ si y sólo si

$$x \in A \quad \text{y} \quad \emptyset \neq B_A(x, r) \cap S = [B(x, r) \cap A] \cap S = B(x, r) \cap S, \quad \forall r > 0,$$

(pues $S \subset A$) si y sólo si $x \in A$ y $x \in \bar{S}$ si y sólo si $x \in \bar{S} \cap A$. Por lo tanto, $(\bar{S})_A = \bar{S} \cap A$.

(iv). Si S es un conjunto cerrado en A , entonces

$$S = (\bar{S})_A = \bar{S} \cap A,$$

por (iii), donde $\bar{S}$ es un conjunto cerrado en X .

Si $S = F \cap A$, donde F es algún conjunto cerrado en X , entonces

$$(\bar{S})_A = (\overline{F \cap A})_A = \overline{F \cap A} \cap A \subset \bar{F} \cap \bar{A} \cap A = F \cap \bar{A} \cap A = F \cap A = S,$$

donde la contención se cumple por ser $\bar{F} \cap \bar{A}$ un conjunto cerrado en X más grande que $F \cap A$. Luego S es cerrado en A .

(v). S es un conjunto abierto en A si y sólo si $A \setminus S$ es un conjunto cerrado en A si y sólo si $A \setminus S = F \cap A$, donde F es algún conjunto cerrado en X , si y sólo si

$$S = A \setminus (A \setminus S) = A \setminus (F \cap A) = A \setminus F = A \cap (\complement F),$$

donde $\complement F$ es un conjunto abierto en X . ■

2.62 Ejemplo. De acuerdo al Ejemplo 2.29, la topología del subespacio $\mathbb{R}$ de $\bar{\mathbb{R}}$ coincide

con la topología de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, es decir, los abiertos del subespacio $\mathbb{R}$ de $\overline{\mathbb{R}}$ coinciden con los abiertos usuales de $\mathbb{R}$. ◀

La versión para subespacios de los Teoremas 2.19 y 2.20 es el resultado siguiente.

2.29 Teorema. Sean A un subespacio de un espacio métrico X , S un subconjunto de A y $x \in A$. Entonces $x \in (\overline{S})_A$ si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ de puntos de S que converge a x . Además, S es un conjunto cerrado en el subespacio A si y sólo si cualquier sucesión de puntos de S que sea convergente en A converge a un punto de S .

2.63 Ejemplo. En el subespacio

$$A = [0, 1[\cup (]1, 2] \cap \mathbb{Q} \cup \{3\}$$

de $\mathbb{R}$ con la distancia usual, se tiene que el conjunto $S = \{3\}$ es abierto y cerrado en A (aunque dicho conjunto no sea abierto en $\mathbb{R}$), pues

$$\{3\} = B_A(3, 1/2) = B'_A(3, 1/2);$$

el conjunto $T =]3/2, 2] \cap \mathbb{Q}$ es abierto pero no cerrado en A , pues

$$(\overline{T})_A = \overline{T} \cap A = [3/2, 2] \cap A = [3/2, 2] \cap \mathbb{Q} \neq T,$$

luego T no es cerrado en A , alternativamente, $\{3/2 + 1/n\}_{n=3}^\infty$ es una sucesión de puntos de T que converge en A al punto $3/2 \notin T$; y

$$T =]3/2, 2] \cap \mathbb{Q} =]3/2, 5/2[\cap A,$$

luego T es abierto en A ; el subconjunto $U = [0, 1[$ es abierto y cerrado en A (aunque dicho conjunto no sea ni abierto ni cerrado en $\mathbb{R}$), pues

$$U =]-1/2, 1[\cap A = [0, 1] \cap A;$$

finalmente, el lector puede verificar que

$$(\text{Fr } S)_A = \emptyset, \quad (\text{Fr } T)_A = \{3/2\} \quad \text{y} \quad (\text{Fr } U)_A = \emptyset,$$

por ejemplo, ya se vio que $3/2 \in (\overline{T})_A$ y como

$$3/2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} - \frac{1}{n},$$

donde $\{3/2 - 1/n\}_{n=3}^\infty$ es una sucesión de puntos de $A \setminus T$, es decir, del complemento de T con

respecto a A , que converge al punto $3/2$ de A , se sigue que $3/2 \in \left(\overline{A \setminus T}\right)_A$. Por lo tanto, $3/2 \in (\text{Fr } T)_A$. ◀

2.30 Teorema. *Todo subespacio métrico de un espacio métrico separable es separable.*

Demostración. Sean X un espacio métrico separable, $A \subset X$ y $\mathcal{B} = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una base a lo sumo numerable de la topología de X . Sea H un abierto en el subespacio A . Entonces $H = G \cap A$ para algún conjunto abierto G de X , por el Teorema 2.28. Por el mismo teorema, $\mathcal{B} \cap A = \{B_n \cap A \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una familia a lo sumo numerable de conjuntos abiertos de A . Como $\mathcal{B}$ es base de la topología de X , G debe ser unión de algunos elementos de $\mathcal{B}$, digamos

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{\alpha(k)}.$$

Entonces

$$H = G \cap A = \bigcup_{k=1}^{\infty} (B_{\alpha(k)} \cap A).$$

Esto prueba que $\mathcal{B} \cap A$ es base de la topología de A . Por lo tanto, el subespacio métrico A de X es separable. ■

2.64 Ejemplo. Los subespacios $\mathbb{Q}$, $[0, 1[$ y $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ con la métrica usual, son todos separables. ◀

2.65 Ejemplo. El subespacio $\mathbb{R}$ de $\overline{\mathbb{R}}$ es separable. ◀

Más adelante se analizarán otras propiedades de los subespacios heredadas de las correspondientes propiedades que tenga el espacio métrico subyacente.

2.5. Continuidad

Se analizan los conceptos de función continua, homeomorfismo, isometría y función uniformemente continua; sus caracterizaciones y algunas de sus propiedades. En particular, se introduce el concepto de métricas equivalentes.

2.66 Definición. Sea f una función de un espacio métrico (X, d) en un espacio métrico (Y, ρ) . Se dice que f es una **función continua** o **continua en X** , si para cualquier conjunto

abierto G de Y , su imagen inversa bajo f , es decir,

$$f^{-1}(G) = \{x \in X \mid f(x) \in G\},$$

es un conjunto abierto en X .

2.67 Ejemplo. La función identidad de un espacio métrico (X, d) en sí mismo es claramente continua. ◀

2.68 Ejemplo. Cualquier función constante $\underline{a}$ de un espacio métrico (X, d) en un espacio métrico (Y, ρ) de valor $a \in Y$ es continua.

En efecto, sea G un conjunto abierto arbitrario de Y . Si $a \in G$, entonces $f^{-1}(G) = X$; y si $a \notin G$, entonces $f^{-1}(G) = \emptyset$. En ambos casos, $f^{-1}(G)$ es un conjunto abierto en X . ◀

2.69 Ejemplo. Una función arbitraria de un espacio métrico discreto (X, d) en un espacio métrico (Y, ρ) es continua. Esto se debe a cualquier subconjunto de X es un conjunto abierto (vea el Ejemplo 2.26). ◀

Algunas formulaciones equivalentes del concepto de continuidad se dan en el resultado siguiente.

2.31 Teorema. Sea f una función de un espacio métrico (X, d) en un espacio métrico (Y, ρ) . Las afirmaciones siguientes son equivalentes.

- i. f es una función continua.
- ii. $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, $\forall A \subset X$.
- iii. Para cualquier conjunto cerrado H de Y , su imagen inversa bajo f , es decir,

$$f^{-1}(H) = \{x \in X \mid f(x) \in H\},$$

es un conjunto cerrado en X .

Demostración. (i) implica (ii). Fije $A \subset X$. Sea $y \in f(\overline{A})$. Existe $x \in \overline{A}$ tal que $y = f(x)$. Sea $r > 0$. Por hipótesis, $f^{-1}(B(y, r))$ es un conjunto abierto en X tal que $a \in f^{-1}(B(y, r))$. Ya que $x \in \overline{A}$, se debe tener

$$f^{-1}(B(y, r)) \cap A \neq \emptyset.$$

Si $a \in f^{-1}(B(y, r)) \cap A$, entonces $f(a) \in B(y, r) \cap f(A)$. Esto prueba que $B(y, r) \cap f(A) \neq \emptyset$, $\forall r > 0$, es decir, que $y \in \overline{f(A)}$. Por lo tanto, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, es decir, se cumple (ii).

(ii) implica (iii). Sea H un conjunto cerrado arbitrario en Y . Aplique la hipótesis al conjunto $A = f^{-1}(H)$. Resulta,

$$f\left(\overline{f^{-1}(H)}\right) = f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} = \overline{f(f^{-1}(H))} \subset \overline{H} = H,$$

por ser H cerrado en Y . Luego, por definición de imagen inversa de H bajo f ,

$$\overline{f^{-1}(H)} \subset f^{-1}(H).$$

Esto prueba que $f^{-1}(H)$ es un conjunto cerrado en X , es decir, se cumple (iii).

(iii) implica (i). Sea G un conjunto abierto arbitrario en Y . Aplique la hipótesis al conjunto cerrado $H = \complement G$. Resulta que es cerrado en X el conjunto

$$f^{-1}(H) = f^{-1}(\complement G) = \complement f^{-1}(G),$$

o sea, que $f^{-1}(G)$ es conjunto abierto en X , es decir, se cumple (i). ■

2.32 Proposición. Si f es una función continua de (X, d) en (Y, ρ) y g es una función continua de (Y, ρ) en (Z, ξ) , entonces la composición $g \circ f$ es una función continua de (X, d) en (Z, ξ) .

Demostración. Sea H un conjunto abierto en Z . Por hipótesis, $g^{-1}(H)$ es un conjunto abierto en Y , luego

$$f^{-1}(g^{-1}(H)) = (g \circ f)^{-1}(H)$$

es un conjunto abierto en X . ■

La definición de continuidad puntual es esencialmente la misma que la se ve en los cursos de Cálculo y resulta ser de gran utilidad para probar la posible continuidad de funciones específicas.

2.70 Definición. Sea f una función de un espacio métrico (X, d) en un espacio métrico (Y, ρ) y sea $x_0 \in X$. Se dice que f es continua en el punto x_0 si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, x_0) < \delta \quad \implies \quad \rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon,$$

en lenguaje de conjuntos esto significa que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon),$$

es decir, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon)),$$

equivalentemente, que para cada $\varepsilon > 0$ el conjunto $f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$ es una vecindad de x_0 .

La demostración del resultado siguiente es inmediata (Ejercicio) de la definición anterior y de la Definición 2.27.

2.33 Proposición. Sea f una función de un espacio métrico (X, d) en un espacio métrico (Y, ρ) y sea $x_0 \in X$. Se tiene que f es continua en x_0 si y sólo si para cada vecindad V de $f(x_0)$ en Y existe una vecindad U de x_0 en X tal que

$$f(U) \subset V,$$

es decir,

$$U \subset f^{-1}(V),$$

o sea, que para cada vecindad V de $f(x_0)$ en Y , el conjunto $f^{-1}(V)$ es una vecindad de x_0 .

En términos de sucesiones la continuidad puntual se caracteriza de la siguiente forma.

2.34 Teorema. Sea f una función de un espacio métrico (X, d) en un espacio métrico (Y, ρ) y sea $x_0 \in X$. Se tiene que f es continua en x_0 si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converja a x_0 en X , la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(x_0)$ en Y .

Demostración. Suponga que f es continua en x_0 y sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión que converja a x_0 en X . Sea $\varepsilon > 0$ y considere la bola $B(f(x_0), \varepsilon)$. Como f es continua en x_0 , existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon).$$

También existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(x_0, \delta)$, luego $f(x_n) \in B(f(x_0), \varepsilon)$, $\forall n \geq N$. Por lo tanto, la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(x_0)$ en Y .

Suponga ahora que f no es continua en x_0 . Se debe probar que existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a x_0 en X pero tal que la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ no converge a $f(x_0)$ en

Y . Ya que f no es continua en x_0 , existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ es posible hallar $x_n \in X$ con la propiedad de que

$$d(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad \rho(f(x_0), f(x_n)) \geq \varepsilon_0.$$

Entonces la sucesión $\{d(x_n, x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a cero, luego, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a x_0 en X , pero la sucesión $\{\rho(f(x_0), f(x_n))\}_{n=1}^{\infty}$ no converge a cero, de donde, $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ no converge a $f(x_0)$ en Y . ■

2.35 Corolario. (Principio de ampliación de identidades.) Sean f y g dos funciones de un espacio métrico (X, d) en un espacio métrico (Y, ρ) . Si f y g son continuas en X y toman los mismos valores en todos los puntos de algún conjunto denso A en X , entonces f y g toman los mismos valores en todo punto de X .

Demostración. Fije $x_0 \in X$. Como A es denso en X , existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en A que converge a x_0 . Ya que f y g continuas en x_0 , se sigue del Teorema 2.34 que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0) \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(x_0).$$

Como por hipótesis $f(x_n) = g(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $f(x_0) = g(x_0)$. ■

El resultado siguiente conecta los conceptos de continuidad global y puntual .

2.36 Teorema. Una función f de un espacio métrico (X, d) en un espacio métrico (Y, ρ) es continua en X si y sólo si f es continua en cada punto de X .

Demostración. (a). Suponga que f es continua en X . Fije arbitrariamente $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$. Puesto que $B(f(x_0), \varepsilon)$ es un conjunto abierto en Y que contiene a $f(x_0)$, entonces $f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$ es un conjunto abierto en X que contiene a x_0 , por hipótesis. En particular, dicho conjunto es una vecindad de x_0 . De acuerdo a la Definición 2.70, f es continua en x_0 .

(b). Suponga ahora que f es continua en todo punto de X . Fije un conjunto abierto G en Y . Se debe probar que $f^{-1}(G)$ es un conjunto abierto en X . Sea pues $x_0 \in f^{-1}(G)$. Entonces $f(x_0) \in G$, pero como G es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(x_0), \varepsilon) \subset G$. Luego

$$f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon)) \subset f^{-1}(G).$$

Por hipótesis $f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$ es una vecindad de x_0 , por lo que $f^{-1}(G)$ también debe ser vecindad de x_0 . Esto prueba que $f^{-1}(G)$ es vecindad de cada uno de sus puntos, es decir,

que es un conjunto abierto en X . De acuerdo a la Definición 2.66, f es continua en X . ■

2.71 Ejemplo. Las funciones polinomiales, fracciones racionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, etc., son todas funciones continuas de su dominio de definición, como subespacio de $\mathbb{R}$ con la distancia usual, en $\mathbb{R}$ con la distancia usual. ◀

2.72 Definición. Se dice que una función f de un espacio métrico (X, d) en un espacio métrico (Y, ρ) es una **función lipschitziana** si existe una constante $K \geq 0$ tal que

$$\rho(f(x), f(x')) \leq Kd(x, x'), \quad \forall x, x' \in X$$

A la propiedad anterior se le llama **propiedad de Lipschitz**.

Es claro que toda función lipschitziana es continua en cada punto de X , luego debe ser una función continua en X , por el Teorema 2.36.

2.73 Ejemplo. Considere un espacio normado $(E, \mathcal{N})$, Entonces la función norma $\mathcal{N} : E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \mathcal{N}(x)$, $\mathbb{R}$ con la distancia usual, es continua en $(E, \mathcal{N})$. En efecto, por la Proposición 2.3,

$$|\mathcal{N}(x) - \mathcal{N}(y)| \leq \mathcal{N}(x - y), \quad \forall x, y \in E.$$

Luego la función norma es lipschitziana (con $K = 1$) y, por tanto, continua en E . ◀

2.74 Ejemplo. La función f de $(\ell_p, \mathcal{N}_p)$ en $(\mathbb{R}^N, \mathcal{N}_p)$, $1 \leq p \leq \infty$, definida como

$$f(x) = (x(1), 2x(2), \dots, Nx(N)), \quad \forall x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_p,$$

satisface

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_p(f(x) - f(x')) &= \mathcal{N}_p((x(1) - x'(1), \dots, N(x(N) - x'(N)))) = \left[\sum_{k=1}^N k^p |x(k) - x'(k)|^p \right]^{1/p} \\ &\leq N \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x(k) - x'(k)|^p \right]^{1/p} = N \mathcal{N}_p(x - x'), \quad \forall x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty}, x' = \{x'(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_p, \end{aligned}$$

si $1 \leq p < \infty$, y si $p = \infty$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\infty}(f(x) - f(x')) &= \max_{1 \leq k \leq N} k |x(k) - x'(k)| \leq N \max_{1 \leq k \leq \infty} |x(k) - x'(k)| \\ &= N \mathcal{N}_{\infty}(x - x'), \quad \forall x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty}, x' = \{x'(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_{\infty}. \end{aligned}$$

En cualquier caso, f es una función lipschitziana (con $K = N$). Por lo tanto, f es continua

en ℓ_p , $1 \leq p \leq \infty$. ◀

2.75 Ejemplo. Sea f la función de $(\ell_2, \mathcal{N}_2)$ en $(\ell_1, \mathcal{N}_1)$ definida como

$$f(x) = x^2, \quad \forall x = \{x(n)\}_{n=1}^\infty \in \ell_2,$$

donde $x^2 = \{x^2(n)\}_{n=1}^\infty$. Es claro que f está bien definida (por definición de ℓ_2). Se afirma que f es continua en ℓ_2 . Fije $x = \{x(n)\}_{n=1}^\infty \in \ell_2$ y sea $\varepsilon > 0$. Si $y = \{y(n)\}_{n=1}^\infty \in \ell_2$ es tal que

$$(2.10) \quad \mathcal{N}_2(x - y) \leq 1,$$

entonces

$$(2.11) \quad \mathcal{N}_2(y) \leq 1 + \mathcal{N}_2(x)$$

(por la Proposición 2.1), luego

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \mathcal{N}_1(f(x) - f(y)) &= \mathcal{N}_1(x^2 - y^2) = \mathcal{N}_1((x + y)(x - y)) \\ &\leq \mathcal{N}_2(x + y)\mathcal{N}_2(x - y) \leq [\mathcal{N}_2(x) + \mathcal{N}_2(y)]\mathcal{N}_2(x - y) \leq [1 + 2\mathcal{N}_2(x)]\mathcal{N}_2(x - y), \end{aligned}$$

donde $x^2 - y^2 = \{x^2(n) - y^2(n)\}_{n=1}^\infty$; $(x + y)(x - y) = \{(x(n) + y(n))(x(n) - y(n))\}_{n=1}^\infty$; la primera desigualdad se cumple por la desigualdad de Hölder (vea el Teorema 2.6), con $p = q = 2$; la segunda, por la desigualdad triangular; y la tercera, por (2.11). Sea

$$\delta = \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{1 + 2\mathcal{N}_2(x)} \right\}.$$

Si $y = \{y(n)\}_{n=1}^\infty \in \ell_2$ satisface

$$\mathcal{N}_2(x - y) < \delta,$$

entonces se cumplen (2.10) y

$$[1 + 2\mathcal{N}_2(x)]\mathcal{N}_2(x - y) < \varepsilon.$$

Se sigue pues de (2.12) que si

$$\mathcal{N}_2(x - y) < \delta,$$

entonces

$$\mathcal{N}_1(f(x) - f(y)) < \varepsilon.$$

Por lo tanto, f es continua en x , $\forall x \in \ell_2$, es decir, f es continua en ℓ_2 . ◀

2.76 Ejemplo. Considere la función g de $(\ell_2, \mathcal{N}_2)$ en $\mathbb{R}$, con la distancia usual, definida como

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^2(n), \quad \forall x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2.$$

La función g es continua en ℓ_2 porque es la composición de la función norma $\mathcal{N}_2$ de $(\ell_2, \mathcal{N}_2)$ en $\mathbb{R}$, con la distancia usual, con la función $t \mapsto t^2$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, con la distancia usual. Alternativamente, g es continua por ser la composición de la función f del ejemplo anterior con la función norma de $(\ell_1, \mathcal{N}_1)$ en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. ◀

2.77 Ejemplo. La función de Dirichlet f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, con la distancia usual, dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{I}, \end{cases}$$

no es continua en ningún punto de $\mathbb{R}$ (Ejercicio). Sin embargo, la restricción $f|_{\mathbb{Q}}$ de f al subespacio $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, con la distancia usual, es continua en todo punto de $\mathbb{Q}$, por ser constante de valor uno, es decir,

$$f|_{\mathbb{Q}}(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{Q}. \quad \blacktriangleleft$$

2.78 Ejemplo. La función f del subespacio $[0, 1[\cup]1, 2[$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, con la distancia usual, dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 2 & \text{si } 1 < x < 2, \end{cases}$$

es continua en $[0, 1[\cup]1, 2[$ (Ejercicio). Sin embargo, no existe alguna función continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, con la distancia usual, cuya restricción a $[0, 1[\cup]1, 2[$ sea f (Ejercicio). ◀

Homeomorfismos

2.79 Definición. Se dice que una función f de un espacio métrico (X, d) en un espacio métrico (Y, ρ) es una **aplicación abierta** si para cada conjunto abierto O en X , $f(O)$ es un conjunto abierto en Y . Y se dice que f es una **aplicación cerrada** si para cada conjunto cerrado C en X , $f(C)$ es un conjunto cerrado en Y .

2.80 Definición. Una función f de un espacio métrico (X, d) en un espacio métrico (Y, ρ) se dice que es un **homeomorfismo** si f es biyectiva y tanto f como su función inversa f^{-1} son funciones continuas en X y Y , respectivamente. En este caso se dice que X y Y son **homeomorfos**, y se escribe $X \cong Y$.

Es claro que f es un homeomorfismo de X sobre Y si y solo si f es biyectiva y ambas aplicaciones f y f^{-1} son abiertas o cerradas.

2.81 Ejemplo. Los subespacios $[0, \infty[$ y $[0, 1[$ de $\mathbb{R}$ con la distancia usual son homeomorfos. Un homeomorfismo sería (Justifique), por ejemplo,

$$f(x) = \frac{x}{1+x}, \quad \forall x \geq 0. \quad \blacktriangleleft$$

2.82 Ejemplo. La función $x \mapsto e^x$ es un homeomorfismo de $\mathbb{R}$ sobre el subespacio $]0, \infty[$ de $\mathbb{R}$, con la distancia usual (Justifique). $\blacktriangleleft$

2.83 Definición. Se dice que una función f de un espacio métrico (X, d) en un espacio métrico (Y, ρ) es una **isometría** si preserva distancias, es decir, se cumple

$$\rho(f(x), f(x')) = d(x, x'), \quad \forall x, x' \in X.$$

Si existe una isometría **suprayectiva** de (X, d) sobre (Y, ρ) , se dice que X y Y son espacios **isométricos** y se escribe $X \equiv Y$.

2.84 Ejemplo. La función f del sistema ampliado de los números reales $\overline{\mathbb{R}}$ en el subespacio $[-1, 1]$ de $\mathbb{R}$ con la distancia usual, dada en el Ejemplo 2.6, es una isometría suprayectiva de $\overline{\mathbb{R}}$ sobre $[-1, 1]$. $\blacktriangleleft$

2.85 Ejemplo. Si $X \equiv Y$, entonces $X \cong Y$.

Esto se sigue del hecho de que toda isometría es una función inyectiva y continua y de que su función inversa es también una isometría (Justifique). $\blacktriangleleft$

Métricas equivalentes

2.86 Definición. Se dice que dos métricas d y ρ sobre un mismo conjunto X son **topológicamente equivalentes** si inducen una misma topología sobre X , es decir, un conjunto G es abierto en (X, d) si y sólo si es abierto en (X, ρ) .

2.37 Proposición. Sean d y ρ dos métricas sobre un conjunto X . Las afirmaciones siguientes son equivalentes.

- i. Las métricas d y ρ son equivalentes.
- ii. Toda d -bola contiene una ρ -bola del mismo centro y viceversa.
- iii. La función identidad de (X, d) sobre (X, ρ) es un homeomorfismo.

La demostración se sigue directamente de la definición y se deja como ejercicio para el lector.

2.87 Ejemplo. Cualquier métrica sobre un conjunto arbitrario es topológicamente equivalente a una métrica acotada.

En efecto, sea d una métrica arbitraria sobre un conjunto X . Defina la función $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\rho(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}, \quad \forall x, y \in X.$$

Se verifica de inmediato (Ejercicio) que ρ es una métrica acotada sobre X . Es claro que

$$B_d(x, r) = B_\rho(x, r) \quad \forall x \in X \quad \text{y} \quad \forall 0 < r \leq 1.$$

Puesto que toda bola abierta contiene una bola abierta del mismo centro con radio menor que uno, entonces toda d -bola contiene una ρ -bola del mismo centro de radio menor que uno y viceversa. La Proposición 2.37 asegura entonces que d y ρ son métricas equivalentes en X . ◀

2.88 Ejemplo. La métrica $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

es topológicamente equivalente a la métrica usual de $\mathbb{R}$.

Se verifica de inmediato (Ejercicio) que d es efectivamente una métrica sobre $\mathbb{R}$. Se afirma que la función identidad $I : (\mathbb{R}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbb{R}, d)$ es un homeomorfismo. En efecto, la función I es la composición de las funciones

$$\arctan : (\mathbb{R}, |\cdot|) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], |\cdot|$$

la cual es un homeomorfismo (pues se sabe que dicha función y su inversa son continuas) y

$$\tan : \left(\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, |\cdot| \right) \rightarrow (\mathbb{R}, d)$$

la cual es una isometría suprayectiva, pues

$$d(\tan x, \tan y) = |\arctan(\tan x) - \arctan(\tan y)| = |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

luego es un homeomorfismo. Así pues $I = \tan \circ \arctan$ es un también un homeomorfismo. Esto prueba la afirmación. Por lo tanto, d es topológicamente equivalente a la métrica usual en $\mathbb{R}$. ◀

Conceptos topológicos son aquellos cuya definición depende únicamente de la topología del espacio en consideración, como conjunto abierto, cerrado, vecindad, convergencia de sucesiones, interior, exterior, frontera, densidad, separabilidad, continuidad, etc. Las propiedades topológicas de un espacio se caracterizan por ser invariantes bajo homeomorfismos. Conceptos no topológicos serían los conceptos de bola, esfera, función lipschitziana, isometría, etc. y se caracterizan por no ser necesariamente preservados bajo homeomorfismos. El concepto siguiente tampoco es un concepto topológico.

Continuidad uniforme

El concepto de continuidad uniforme es un recurso técnico de gran utilidad para demostrar diversos resultados importantes en análisis real, entre otros, el teorema de cambio de variable y algunos teoremas de convolución en teoría de integración.

2.89 Definición. Sea f una función de un espacio métrico (X, d) en un espacio métrico (Y, ρ) . Se dice que f es **uniformemente continua** en X si $\forall \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, $\forall u, v \in X$,

$$d(u, v) < \delta \quad \implies \quad \rho(f(u), f(v)) < \varepsilon.$$

Note, en particular, que toda función uniformemente continua en X debe ser continua en X .

2.90 Ejemplo. Toda función lipschitziana es uniformemente continua. En particular, las funciones constantes son uniformemente continuas. Más adelante se verá que toda función

continua de un espacio métrico compacto en otro espacio métrico es uniformemente continua, por ejemplo, toda función continua del subespacio $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, con la distancia usual. ◀

2.91 Ejemplo. Las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, con la distancia usual, dadas por

$$f(x) = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{1}{x}, \quad \forall x > 0,$$

son continuas pero no uniformemente continuas en $\mathbb{R}$ y $]0, \infty[$, respectivamente.

Se verá solamente que f no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$, el caso de g se deja como ejercicio para el lector. Se debe proponer un $\varepsilon_0 > 0$ tal que para cualquier $\delta > 0$ se puedan encontrar dos puntos $x, y \in \mathbb{R}$ cuya distancia sea menor que δ pero tales que la distancia entre $f(x)$ y $f(y)$ sea mayor o igual que ε_0 . Fije $\varepsilon_0 = 1$ y sea $\delta > 0$ arbitrario. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \delta$ y sean $x = n$ y $y = n - 1/n$. Entonces $x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y| = 1/(2n) < \delta$, pero

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y||x - y| = \left(n + n - \frac{1}{n}\right) \left(\frac{1}{n}\right) \geq (n) \left(\frac{1}{n}\right) = 1 = \varepsilon_0.$$

Por lo tanto f no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. ◀

2.92 Definición. Se dice que dos métricas d y ρ sobre un conjunto X son **uniformemente equivalentes** si la función identidad de (X, d) sobre (X, ρ) y su inversa son funciones uniformemente continuas.

Observe que, por la Proposición 2.37, si dos métricas son uniformemente equivalentes, entonces deben ser topológicamente equivalentes.

Se tiene la siguiente condición suficiente (cuya demostración se deja como ejercicio para el lector) para que dos métricas sean uniformemente equivalentes. Se verá más adelante que esta condición es también necesaria para espacios normados.

2.38 Proposición. Dos métricas d y ρ sobre un conjunto X son **uniformemente equivalentes** si existen constantes $\alpha, \beta > 0$ tales que

$$\alpha d(x, y) \leq \rho(x, y) \leq \beta d(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

2.93 Ejemplo. Las métricas ρ_p , $1 \leq p \leq \infty$, sobre $\mathbb{R}^n$ son todas uniformemente equivalentes.

En efecto, basta probar que si $1 \leq p < \infty$, entonces ρ_p y ρ_∞ son uniformemente

equivalentes. Es claro que

$$\frac{1}{n^{1/p}} \mathcal{N}_p(x) \leq \mathcal{N}_\infty(x) \leq \mathcal{N}_p(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

luego

$$\frac{1}{n^{1/p}} \rho_p(x, y) \leq \rho_\infty(x, y) \leq \rho_p(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Por la Proposición 2.38, ρ_p y ρ_∞ son uniformemente equivalentes sobre $\mathbb{R}^n$. ◀

Ejercicios

2.1. Sea $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y| + 1 & \text{si } x > 0 \text{ y } y \leq 0 \text{ o } x \leq 0 \text{ y } y > 0, \\ |x - y| & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

Pruebe que d es una métrica en $\mathbb{R}$.

2.2. Demuestre que en todo espacio métrico (X, d) se cumple la desigualdad

$$|d(x, z) - d(y, u)| \leq d(x, y) + d(z, u), \quad \forall x, y, z, u \in X.$$

2.3. Muestre que los espacios vectoriales siguientes son espacios normados.

- i. $(\ell_1, \mathcal{N}_1)$.
- ii. $(\ell_\infty, \mathcal{N}_\infty)$.
- iii. $(\mathcal{C}([a, b]), \mathcal{N}_p)$, $p \in [1, +\infty]$.
- iv. $(\mathcal{B}([a, b]), \mathcal{N}_\infty)$.

2.4. Considere dos métricas d_1 y d_2 sobre un conjunto X . **Pruebe** que $d_1 + d_2$ y $\max\{d_1, d_2\}$ son también métricas sobre X . También, dé un ejemplo donde $\min\{d_1, d_2\}$ no sea una métrica sobre X .

Sugerencia. Considere un conjunto con tres puntos.

2.5. Sea $d : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ la función

$$d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} |a - b|.$$

¿Es d una métrica sobre $\mathcal{P}(\mathbb{R})$?

2.6. Pseudométricas. Se dice que una función $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ es una **pseudométrica** sobre el conjunto X si, $\forall x, y, z \in X$, se cumplen las condiciones siguientes.

- i. $0 \leq \rho(x, y)$ y $\rho(x, x) = 0$.
- ii. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.
- iii. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

$\forall x, x' \in X$ se escribe $x \sim x'$ si y sólo si $\rho(x, x') = 0$. **Muestre** que “ $\sim$ ” es una relación de equivalencia sobre X . Sea X^* el conjunto de todas las clases de equivalencia de X . **Demuestre** que la función $\rho : X^* \times X^* \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\rho(x^*, y^*) =: \rho(x, y)$, $\forall x, y \in X$, está bien definida y que es una métrica sobre X^* .

2.7. Se denota por $\mathcal{R}([a, b])$ al conjunto de todas las funciones Riemann-integrables sobre $[a, b]$. **Pruebe** que la función $\rho : \mathcal{R}([a, b]) \times \mathcal{R}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$\rho(f, g) = \int_a^b |f(t) - g(t)| dt,$$

es una pseudométrica sobre $\mathcal{R}([a, b])$ que no es métrica.

2.8. Pruebe que en todo espacio normado, si A es la bola con centro en a y radio $r > 0$, abierta o cerrada, se cumplen las afirmaciones siguientes.

- i. A° es la bola abierta correspondiente.
 - ii. $\overline{A}$ es la bola cerrada correspondiente.
 - iii. $\text{Fr } A$ es la bola esfera correspondiente.
 - iv. $\text{Ext } A$ es el complemento de la bola cerrada correspondiente.
- ¿Se cumplen (i)–(iv) para espacios métricos arbitrarios?

En los ejercicios siguientes (X, d) es un espacio métrico.

2.9. $\forall A, B \subset X$, **demuestre** lo siguiente.

- i. $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$.
- ii. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Proporcione ejemplos en los que dichas contenciones sean estrictas.

2.10. Sea $A \subset X$. **Pruebe** lo siguiente.

- i. A es un conjunto abierto si y sólo si $A \cap \text{Fr } A = \emptyset$.
- ii. A es un conjunto cerrado si y sólo si $\text{Fr } A \subset A$.

2.11. Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones convergentes en X con límites $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ y $y = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$. **Muestre** lo siguiente.

i. $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y) = d(x, y)$.

ii. $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$.

Sugerencia. El Ejercicio 2.2 puede ser útil.

2.12. $\forall A \subset X$ y $x \in X$, se define

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Demuestre las afirmaciones siguientes.

i. $\forall x, y \in X$ y $A \subset X$, se tiene $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.

ii. Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente en X y $A \subset X$. Si $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$, entonces

$$d(x, A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, A).$$

2.13. **Muestre** que, $\forall A \subset X$, se cumple

$$\overline{A} = \{x \in X | d(x, A) = 0\}.$$

Deduzca que A es cerrado si y sólo si $d(x, A) = 0$ implica $x \in A$.

2.14. Sea

$$A = \left\{ x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_1 \mid \sum_{n=1}^{+\infty} nx(n) = 0 \right\}$$

y sea $e_1 = \{e_1(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, donde $e_1(1) = 1$ y $e_1(n) = 0$, $\forall n \neq 1$. **Pruebe** que $e_1 \in \overline{A}$ y que $e_1 \notin A$. **Deduzca** que A no es cerrado en ℓ_1 .

2.15. $\forall A \subset X$ y $x \in X$, **demuestre** lo siguiente.

i. $d(x, A) = d(x, \overline{A})$.

ii. $x \in \text{Ext } A$ si y sólo si $d(x, A) > 0$.

2.16. Considere un subconjunto denso D de un espacio métrico X . **Pruebe** que para todo conjunto abierto G de X , se cumple $\overline{G \cap D} = \overline{G}$. **Deduzca** que la intersección de dos subconjuntos abiertos densos de X es un conjunto denso.

2.17. **Proporcione** un ejemplo de dos subconjuntos densos de un espacio métrico que sean disjuntos.

2.18 Pruebe que toda familia de conjuntos abiertos disjuntos en un espacio métrico separable es a lo sumo numerable.

2.19. Considere un espacio métrico X .

i. Si A es un conjunto abierto en X , **muestre** que para todo $B \subset X$, se cumple $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

ii. **Proporcione** un ejemplo de dos intervalos A, B en $\mathbb{R}$ tales que $A \cap \overline{B} \not\subset \overline{A \cap B}$.

iii. **Encuentre** un ejemplo en $\mathbb{R}$ de dos conjuntos abiertos A, B tales que los cuatro conjuntos: $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A \cap B}$ y $\overline{A} \cap \overline{B}$ sean todos distintos.

2.20. Si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ es una familia arbitraria de subconjuntos de un espacio métrico X , **demuestre** que

$$\overline{\bigcup_{\alpha \in \Omega} A_\alpha} \supset \bigcup_{\alpha \in \Omega} \overline{A_\alpha}$$

y en el caso de que Ω sea finito, que la inclusión se sustituye por la igualdad. **Dé** un ejemplo en $\mathbb{R}$ de una familia $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Omega}$ tal que

$$\overline{\bigcup_{\alpha \in \Omega} A_\alpha} \neq \bigcup_{\alpha \in \Omega} \overline{A_\alpha}.$$

2.21. Considere un espacio métrico X . **Pruebe** las afirmaciones siguientes.

i. $\forall A \subset X$, se cumple $\text{Fr}(\overline{A}) \subset \text{Fr} A$ y $\text{Fr}(A^\circ) \subset \text{Fr} A$. Encuentre un ejemplo donde $\text{Fr} A$, $\text{Fr}(\overline{A})$, $\text{Fr}(A^\circ)$ sean todos distintos.

ii. $\forall A, B \subset X$, se cumple $\text{Fr}(A \cup B) \subset \text{Fr} A \cup \text{Fr} B$. Proporcione un ejemplo donde $\text{Fr} A$, $\text{Fr} B$, $\text{Fr}(A \cup B)$, $\text{Fr} A \cup \text{Fr} B$ sean todos distintos.

iii. $\forall A, B \subset X$ tales que $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, se cumple $\text{Fr}(A \cup B) = \text{Fr} A \cup \text{Fr} B$.

iv. $\forall A, B \subset X$, se cumple $\text{Fr}(A \setminus B) \subset \text{Fr} A \cup \text{Fr} B$.

Proporcione ejemplos en $\mathbb{R}$ en los que las inclusiones dadas en (ii) y (iv) sean estrictas.

2.22 Sean X un espacio métrico, A un subconjunto de X y $x \in X$. **Demuestre** que x es un punto de acumulación de A si y sólo si $B(x, r) \cap A$ es un subconjunto infinito de A , $\forall r > 0$, equivalentemente, $V \cap A$ es un subconjunto infinito de A , $\forall V \in \mathcal{V}(x)$.

2.23. Considere un espacio métrico (X, d) en el que d satisface la desigualdad “ultramétrica”

$$d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}, \quad \forall x, y, z \in X.$$

Demuestre lo siguiente.

- i. $d(x, y) \neq d(y, z)$ implica $d(x, z) = \max\{d(x, y), d(y, z)\}$.
- ii. Cada bola abierta $B(x, r)$ en X es a la vez un conjunto abierto y cerrado. Además, $y \in B(x, r)$ implica $B(y, r) = B(x, r)$.
- iii. Cada bola cerrada $B'(x, r)$ en X es a la vez un conjunto abierto y cerrado. Además, $y \in B'(x, r)$ implica $B'(y, r) = B'(x, r)$.
- iv. Si dos bolas tienen un punto en común, una de ellas debe estar contenida en la otra.

2.24. Demuestre que $(\ell_\infty, \mathcal{N}_\infty)$ no es separable.

Sugerencia. Construya una familia no numerable de elementos de ℓ_∞ que disten entre sí en más de 1.

2.25. Muestre que el conjunto de puntos aislados de un espacio métrico separable debe ser un conjunto a lo sumo numerable.

2.26. Se dice que x es un **punto de condensación** de un subconjunto A de un espacio métrico X , si toda vecindad de x contiene un conjunto infinito no numerable de puntos de A . El conjunto de puntos de condensación de A se designa por $Cond A$. Suponga que X es separable. **Pruebe** las afirmaciones siguientes.

- i. Si $A \cap Cond A = \emptyset$, entonces A es a lo sumo numerable.

Sugerencia. Considere la intersección de A con los abiertos de alguna base numerable de X .

- ii. $A \cap \mathcal{C}(Cond(A))$ es un conjunto a lo sumo numerable.
- iii. $Cond A = Cond(A \cap Cond A)$.
- iv. $Cond A$ es un conjunto cerrado.
- v. $Cond A \subset Cond(Cond A)$.

2.27. En un espacio métrico (X, d) se define la función $Diam : \mathcal{P}(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ como

$$Diam(A) = \sup_{a, b \in A} d(a, b), \quad \forall A \in \mathcal{P}(X).$$

A $Diam(A)$ se le llama el **diámetro** del subconjunto A de X . **Pruebe** que el conjunto B de todas las sucesiones decrecientes no negativas en la bola unitaria de ℓ_1 tiene diámetro 2.

2.28. Demuestre las afirmaciones siguientes:

- i. El conjunto $]1/2, 1]$ es abierto en $[0, 1]$, pero no es abierto en $\mathbb{R}$.
- ii. El conjunto $[\sqrt{2}, \sqrt{3}] \cap \mathbb{Q}$ es abierto en $\mathbb{Q}$, pero no es abierto en $\mathbb{R}$.

2.29. Consider un subespacio A de un espacio métrico X . **Muestre** las afirmaciones siguientes.

- i. Todo conjunto abierto en A es un conjunto abierto en X si y sólo si A es un conjunto abierto en X .
- ii. Todo conjunto cerrado en A es un conjunto cerrado en X si y sólo si A es un conjunto cerrado en X .

2.30. Sean B, B' dos subconjuntos no vacíos de un espacio métrico X y A un subconjunto de $B \cap B'$ tal que es abierto (cerrado) con respecto a B y con respecto a B' . **Pruebe** que A debe ser abierto (cerrado) con respecto a $B \cup B'$.

2.31. En un espacio métrico X , un subconjunto L de X se dice que es **localmente cerrado** si para cada $x \in L$, existe una vecindad V de x tal que $L \cap V$ es cerrado respecto a V . **Muestre** que L es localmente cerrado en X si y sólo si L es la intersección de un conjunto abierto con un conjunto cerrado en X .

2.32. Demuestre que el subespacio $L = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{N}_p)$, es isométrico a $\mathbb{R}$ provisto de la distancia usual.

2.33. Considere un espacio métrico separable acotado (X, d) , es decir, $\text{Diam } X < +\infty$, y un subconjunto denso $\{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de X . Para todo elemento s de X , se define x_s como la sucesión $\{d(s, s_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$. **Pruebe** que la aplicación $s \mapsto x_s$ es una isometría de X sobre un subespacio de ℓ_∞ . ¿Es denso en ℓ_∞ dicho subespacio?

2.34. Sean X, Y dos espacios métricos y $f : X \rightarrow Y$ una función. **Pruebe** que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- i. f es continua en X .
- ii. Para todo $B \subset Y$, $f^{-1} \left(\overset{o}{B} \right) \subset \widehat{f^{-1}(B)}$.
- iii. Para todo $B \subset Y$, $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.

2.35. Pruebe que toda función constante es continua

2.36. Suponga que X está provisto de la métrica discreta. Si f es una función arbitraria de X en cualquier espacio métrico Y , **demuestre** que f es continua en X .

2.37. Si $f : X \rightarrow Y$ es continua y $y \in Y$, **muestre** que el conjunto

$$\{x \in X \mid f(x) = y\}$$

es cerrado en X .

2.38. Considere un espacio métrico (X, d) y fije un punto $x_0 \in X$. Si $f_{x_0} : X \rightarrow \mathbb{R}$ es la función

$$f_{x_0}(x) = d(x, x_0), \quad \forall x \in X,$$

pruebe que f_{x_0} es continua en X ¿Es f_{x_0} uniformemente continua?

2.39. Si A es un subconjunto no vacío de X y f, g son dos funciones continuas de X en Y tales que $f(x) = g(x)$ para toda $x \in A$, **muestre** que $f(x) = g(x)$ para toda $x \in \overline{A}$.

2.40. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua tal que

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

demuestre que existe una $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = Mx$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

2.41. Usando la definición de continuidad uniforme, **pruebe** que la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida como $f(x) = x^2$, para toda $x \in \mathbb{R}$, es uniformemente continua en $[0, M]$ pero que no lo es en $[0, \infty[$.

2.42. Considere una función $f : X \rightarrow Y$ continua y suprayectiva. Si D es denso en X , **demuestre** que $f(D)$ es denso en Y .

2.43. Dadas $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ defina $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$h(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad \forall x \in X.$$

Si f, g son continuas, **muestre** que h es continua.

2.44. Si $f : X \rightarrow X$ es continua, **demuestre** que el conjunto

$$\{x \in X \mid f(x) = x\}$$

es cerrado en X .

2.45. Pruebe que una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es continua si y sólo si los conjuntos

$$A_\alpha = \{x \in X \mid f(x) < \alpha\}, \quad B_\alpha = \{x \in X \mid f(x) > \alpha\}$$

son ambos abiertos en X , para toda $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.46. Si A, B son dos subconjuntos cerrados disjuntos no vacíos de X , pruebe que existe una función continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$.

Sugerencia. Considere la función $f(x) = d(x, A)/(d(x, A) + d(x, B))$, para toda $x \in X$.

2.47. Considere dos subespacios A y B de un espacio métrico X . Sean $f : A \rightarrow Y, g : B \rightarrow Y$ dos funciones tales que $f|_{A \cap B} = g|_{A \cap B}$. Se define la función $h : A \cup B \rightarrow Y$, para cada $x \in A \cup B$, como

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \in B. \end{cases}$$

Dé un ejemplo de funciones f, g que sean continuas pero tales que h no sea continua. Si A, B son subconjuntos cerrados de X , **pruebe** que necesariamente h es continua si f, g lo son.

2.48. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función biyectiva. **Demuestre** que f es un homeomorfismo si y sólo si

$$f(\overline{A}) = \overline{f(A)}, \quad \forall A \subset X.$$

2.49. Considere dos funciones continuas $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$. Si f es suprayectiva y $g \circ f$ es un homeomorfismo de X sobre Z , **muestre** que f es un homeomorfismo de X sobre Y y que g es un homeomorfismo de Y sobre Z .

2.50. En un espacio métrico (X, d) defina la función $d' : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad \forall x, y \in X.$$

Pruebe que d' es una métrica sobre X la cual resulta ser topológicamente equivalente a d .

2.51. Considere dos espacios métricos (X, d) (Y, ρ) y una función continua $f : X \rightarrow Y$. Defina la función $D : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$D(x, x') = d(x, x') + \rho(f(x), f(x')), \quad \forall x, x' \in X.$$

Pruebe las afirmaciones siguientes.

- i. D es una métrica sobre X .

ii. d, D son métricas topológicamente equivalentes.

iii. Si f es uniformemente continua, entonces (X, d) y (X, D) son uniformemente homeomórficos.

2.52. Demuestre que el subespacio $L = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{N}_p)$, es isométrico a $\mathbb{R}$ provisto de la distancia usual.

2.53. Los ejercicios y preguntas que aparecen a lo largo del capítulo.

Capítulo 3. Completez, compacidad y conexidad

En este capítulo se complementa el estudio de los espacios métricos iniciado en el capítulo anterior presentando varios resultados importantes relacionados con las propiedades de completez, compacidad y conexidad. Se puede decir que los resultados de este capítulo son los “teoremas fuertes” de la teoría de espacios métricos por su trascendencia, aplicabilidad y elegancia.

A lo largo de este capítulo se supondrá que X es conjunto provisto de una métrica d a menos que se especifique otra cosa.

3.1. Espacios métricos completos

La noción de completez se relaciona con la idea de que el espacio métrico en consideración no tenga “huecos” a lo largo de su recorrido, ni en su interior ni al llegar a su frontera. La herramienta natural para la detección o exclusión de posibles “huecos” es la condición de Cauchy.

3.1 Definición. Se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ es **una sucesión de Cauchy** (o que satisface la condición de Cauchy) si $\forall \varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq N \quad \implies \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Es claro (Ejercicio) que la condición de Cauchy equivale a

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 0.$$

3.2 Observación. Se verifican de inmediato (Ejercicio) las afirmaciones siguientes.

1. Toda sucesión convergente es de Cauchy.
2. Toda sucesión de Cauchy es acotada.

3. Una sucesión de Cauchy es convergente si y sólo si alguna de sus subsucesiones es convergente. En este caso, el límite de la sucesión coincide con el límite la subsucesión. ◀

3.3 Definición. Un espacio métrico X se dice que es **completo** si toda sucesión de Cauchy converge a algún punto de X .

3.4 Ejemplo. Se sabe que $\mathbb{R}$ con la distancia usual es completo, lo mismo que $(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}_p)$, $1 \leq p \leq \infty$. ◀

3.5 Ejemplo. Todo espacio métrico discreto es completo, pues las únicas sucesiones de Cauchy son las sucesiones constantes, las cuales son trivialmente convergentes. ◀

3.6 Ejemplo. El subespacio $[0, 1[$ de $\mathbb{R}$ con la distancia usual no es completo, pues la sucesión $\{1 - 1/n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy pero no converge a ningún punto de $[0, 1[$ (Ejercicio). Tampoco el subespacio $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$ con la distancia usual es completo (Ejercicio). ◀

3.7 Ejemplo. El subespacio $\mathbb{R}$ de $\overline{\mathbb{R}}$ no es completo (cf. Ejemplo 3.4). En efecto, la sucesión $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en el subespacio $\mathbb{R}$, pues

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} d(n, m) = \lim_{n,m \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{1 + |n|} - \frac{m}{1 + |m|} \right| = 0,$$

pero no converge a ningún punto de $\mathbb{R}$, pues para cualquier $x \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{1 + |n|} - \frac{x}{1 + |x|} \right| = 1 - \frac{x}{1 + |x|} > 0. \quad \blacktriangleleft$$

3.8 Definición. Se dice que un espacio normado es un **espacio de Banach** si es completo como espacio métrico con la métrica inducida por la norma.

3.9 Ejemplo. El espacio normado de sucesiones reales $(\ell_p, \mathcal{N}_p)$, $1 \leq p < \infty$, es un espacio de Banach.

En efecto, sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en ℓ_p . Escriba $x_n = \{x_n(\nu)\}_{\nu=1}^{\infty}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Puesto que, para cada $\nu \in \mathbb{N}$, se tiene

$$|x_n(\nu) - x_m(\nu)| \leq \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_n(k) - x_m(k)|^p \right]^{1/p} = \mathcal{N}_p(x_n - x_m), \quad \forall \nu, n, m \in \mathbb{N},$$

entonces la sucesión $\{x_n(\nu)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ (con la distancia usual). Existe pues en $\mathbb{R}$ el límite

$$y_{\nu} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(\nu), \quad \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Defina $y = \{y(\nu)\}_{\nu=1}^{\infty}$. Se afirma que $y \in \ell_p$ y que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a y en ℓ_p .

Sea pues $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left[\sum_{j=1}^{\infty} |x_n(j) - x_m(j)|^p \right]^{1/p} = \mathcal{N}_p(x_n - x_m) < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N.$$

Fije $M \in \mathbb{N}$. Se debe tener

$$\left[\sum_{j=1}^M |x_n(j) - x_m(j)|^p \right]^{1/p} < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N.$$

Fije ahora también cualquier $n \geq N$ y tome el límite en la desigualdad anterior cuando $m \rightarrow \infty$. Resulta (por tratarse de un suma finita) que

$$\left[\sum_{j=1}^M |x_n(j) - y(j)|^p \right]^{1/p} \leq \varepsilon.$$

Esta desigualdad es válida para cualquier $M \in \mathbb{N}$ y cualquier $n \geq N$. Luego, para cualquier $n \geq N$, se debe tener

$$\left[\sum_{j=1}^{\infty} |x_n(j) - y(j)|^p \right]^{1/p} \leq \varepsilon.$$

Esto prueba, en particular, que la sucesión $x_n - y \in \ell_p$, poro siendo ℓ_p un espacio vectorial, se concluye que $y \in \ell_p$. Además, la desigualdad anterior también prueba que

$$\mathcal{N}_p(x_n - y) \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq N,$$

es decir, que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$ en ℓ_p . Por lo tanto, ℓ_p es completo. ◀

3.10 Ejemplo. El espacio normado de sucesiones reales $(\ell_\infty, \mathcal{N}_\infty)$ es un espacio de Banach. La demostración es similar a la anterior (Ejercicio). ◀

3.11 Ejemplo. El lector puede verificar como ejercicio que, para $1 \leq p < \infty$, el espacio normado $(\mathcal{C}([a, b]), \mathcal{N}_p)$ no es de Banach. Sin embargo, se verá más adelante que los espacios normados $(\mathcal{C}([a, b]), \mathcal{N}_\infty)$ y $(\mathcal{B}([a, b]), \mathcal{N}_\infty)$ sí son espacios de Banach. ◀

Una caracterización de la propiedad de completez es la siguiente.

3.1 Proposición. Sean X un espacio métrico y D un subconjunto denso de X . Entonces X es completo si y sólo si toda sucesión de Cauchy en D converge a algún elemento de X .

Demostración. La condición es claramente necesaria. Suponga entonces que se cumpla la condición y considere una sucesión de Cauchy $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ de puntos de X . Como D es denso en X , para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $y_n \in D$ tal que

$$(3.1) \quad d(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n}.$$

Se afirma que $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en D que es de Cauchy. En efecto, por la desigualdad del triángulo y por (3.1),

$$d(y_n, y_m) \leq d(y_n, x_n) + d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) \leq \frac{1}{n} + d(x_n, x_m) + \frac{1}{m}, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Como

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} + d(x_n, x_m) + \frac{1}{m} \right] = 0,$$

por ser $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de Cauchy, necesariamente

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(y_n, y_m) = 0.$$

Por hipótesis, la sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ debe converger a algún $x \in X$. Puesto que, por (3.1),

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, x) \leq \frac{1}{n} + d(y_n, x)$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + d(y_n, x) = 0,$$

se concluye que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0,$$

es decir, que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $x \in X$. ■

3.2 Teorema. Sean X un espacio métrico y A un subconjunto de X . Se cumplen las afirmaciones siguientes.

i. Si A es completo como subespacio métrico de X , entonces A es un conjunto cerrado en X .

ii. Si X es completo y A es un conjunto cerrado en X , entonces el subespacio métrico A de X es completo.

Demostración. (i). Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en A que converge a algún punto $x \in X$. Para probar que A es un conjunto cerrado se debe probar que $x \in A$ (vea el Teorema 2.20). Como la sucesión es convergente en X , entonces satisface la condición de Cauchy, luego $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en A . Siendo A completo como subespacio métrico de X , existe $a \in A$ tal que dicha sucesión converge a a en A . Pero entonces $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ también converge a a en X . Ya que el límite de una sucesión es único (cuando existe), necesariamente

$x = a$, es decir, $x \in A$. Por lo tanto, A es un conjunto cerrado.

(ii). Sea ahora $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en el subespacio métrico A de X . Entonces $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es también una sucesión de Cauchy en X . Por hipótesis, la sucesión debe converger a algún punto $x \in X$, pero como A es un conjunto cerrado, $x \in A$ (vea nuevamente el Teorema 2.20). Por lo tanto, el subespacio métrico A de X es completo. ■

Un teorema de extensión

Se probará en esta sección un teorema de extensión para funciones uniformemente continuas que toman valores en un espacio métrico completo.

3.12 Observación. Se verifica usando sólo las definiciones, que toda función f de un espacio métrico (X, d) en otro espacio métrico (Y, ρ) que sea uniformemente continua transforma sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy (Ejercicio).

En particular, si f es una función de X sobre Y tal que f y su inversa f^{-1} son funciones uniformemente continuas, entonces X es completo si y sólo si Y es completo.

Más particularmente, si dos métricas d y ρ sobre un mismo conjunto X son uniformemente equivalentes (vea la Definición 2.92), entonces (X, d) es completo si y sólo si (X, ρ) es completo. ◁

3.13 Definición. Sean X y Y dos conjuntos, un subconjunto A de X y dos funciones $f : A \rightarrow Y$ y $F : X \rightarrow Y$. Se dice que F es una **extensión o ampliación** de f o que f es la **restricción** de F a A , si

$$F(x) = f(x), \quad \forall x \in A.$$

Si f es la restricción de F a A , se escribe $f = F|_A$.

3.3 Teorema. (Teorema de extensión.) Suponga que A es un conjunto denso en un espacio métrico (X, d) y que f es una función del subespacio métrico A de X en un espacio métrico (Y, ρ) . Si f es uniformemente continua en A y Y es completo, entonces f puede ser extendida a todo X de manera única a una función uniformemente continua $F : X \rightarrow Y$.

Demostración. Unicidad. Suponga que F y G son dos extensiones de f a X uniformemente continuas en X . Como se cumplen que A es denso, $F(x) = G(x) = f(x)$, $\forall x \in A$, y

F y G son, en particular, continuas en X , se sigue del principio de ampliación de identidades (Corolario 2.35) que $F(x) = G(x)$, $\forall x \in X$, es decir, que $F = G$.

Existencia. Fije $x \in X$. Se sabe que existe una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en A que converge a x . En particular, la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en A . Siendo f uniformemente continua en A , la sucesión $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ debe ser una sucesión de Cauchy en Y . Como Y es completo, $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a algún punto $y \in Y$.

Se afirma que si $\{a'_n\}_{n=1}^{\infty}$ es otra sucesión en A que converge a x , entonces $\{f(a'_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge al mismo $y \in Y$. En efecto, puesto que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x = \lim_{n \rightarrow \infty} a'_n$, entonces

$$(3.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, a'_n) = 0.$$

Se verá primero que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f(a_n), f(a'_n)) = 0.$$

Sea pues $\varepsilon > 0$. Como f es uniformemente continua en A , existe $\delta > 0$ tal que

$$(3.3) \quad \forall x, y \in A, \quad d(x, y) < \delta \quad \implies \quad \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Por (3.2), existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(a_n, a'_n) < \delta, \quad \forall n \geq N.$$

Luego,

$$\rho(f(a_n), f(a'_n)) < \varepsilon, \quad \forall n \geq N,$$

es decir,

$$(3.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f(a_n), f(a'_n)) = 0.$$

Por (3.4) y por converger a y la sucesión $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$, se debe tener

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = y.$$

Defina entonces $F(x) = y$. Por lo anterior, la función $F : X \rightarrow Y$ está bien definida. Además, si $x \in A$, como la sucesión constante de valor x converge a x , entonces

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = f(x).$$

Esto prueba que F es una extensión de f a todo X .

Se afirma ahora que F es uniformemente continua en X . En efecto, dados $u, v \in X$ tales que $d(u, v) < \delta/3$, existen dos sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ en A que convergen a u y v , respectivamente, por ser A denso en X . Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(u, x_n) < \delta/3 \quad \text{y} \quad d(v, y_n) < \delta/3, \quad \forall n \geq N.$$

Entonces

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, u) + d(u, v) + d(v, y_n) < \delta, \quad \forall n \geq N.$$

Se concluye de (3.3) que

$$\rho(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Luego,

$$\rho(F(u), F(v)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f(x_n), f(y_n)) \leq \varepsilon.$$

Por lo tanto,

$$\forall u, v \in X, \quad d(u, v) < \delta \quad \implies \quad \rho(F(u), F(v)) \leq \varepsilon,$$

es decir, F es uniformemente continua en X . ■

3.14 Observación. La conclusión del Teorema 3.3 puede fallar si se supone solamente que f es continua o si el espacio métrico Y no es completo. Por ejemplo, el lector puede verificar en detalle (Ejercicio) que la función $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad \forall 0 < x < 1,$$

es continua en el subespacio denso $]0, 1]$ de $[0, 1]$ (con la distancia usual de $\mathbb{R}$) pero que no existe ninguna extensión continua $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de f . También, que la función $g : [0, 1] \setminus \{1/2\} \rightarrow [0, 1] \setminus \{1/2\}$ dada por

$$g(x) = x, \quad \forall x \in [0, 1] \setminus \{1/2\},$$

es uniformemente continua en el subespacio denso $[0, 1] \setminus \{1/2\}$ de $[0, 1]$ (con la distancia usual de $\mathbb{R}$) pero que no existe ninguna extensión continua $G : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \setminus \{1/2\}$ de g . ◁

Teorema de bolas anidadas

Otra caracterización de la completez para espacios métricos la proporciona el llamado teorema de bolas anidadas.

3.15 Definición. Se dice que una sucesión de conjuntos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X es **decreciente** (respectivamente, **creciente**) si

$$A_n \supset A_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

(respectivamente, $A_n \subset A_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$).

3.4 Teorema. (Teorema de bolas anidadas.) Un espacio métrico X es completo si y sólo si para toda sucesión decreciente de bolas cerradas $\{B'(x_n, r_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ en $\mathbb{R}$, se cumple que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B'(x_n, r_n) \neq \emptyset.$$

Demostración. (a). Suponga que X es completo y considere una sucesión decreciente de bolas cerradas $\{B'(x_n, r_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ tienda a cero en $\mathbb{R}$.

Se afirma que la sucesión de centros de las bolas $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en X . En efecto, como la sucesión de bolas es decreciente, necesariamente $x_m \in B'(x_n, r_n), \forall m \geq n$ y $\forall n \in \mathbb{N}$. Luego,

$$d(x_n, x_m) \leq r_n, \quad \forall m \geq n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a cero, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$r_n < \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Entonces, $m \geq n \geq N$ implican

$$d(x_n, x_m) \leq r_n < \varepsilon.$$

Esto prueba la afirmación. Por ser X completo, existe $x \in X$ que es el límite de la sucesión de centros $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Se afirma ahora que

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B'(x_n, r_n).$$

En efecto, fije $n \in \mathbb{N}$ arbitrariamente. La subsucesión $\{x_m\}_{m=n}^\infty$ está enteramente contenida en el conjunto cerrado $B'(x_n, r_n)$ y converge a $x \in X$. Entonces, $x \in \overline{B'(x_n, r_n)} = B'(x_n, r_n)$ (vea el Teorema 2.19). Esto prueba la afirmación.

(b). Suponga que se cumple la condición y considere una sucesión de Cauchy $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ en X . Existe pues $\alpha(1) \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x_{\alpha(1)}) < \frac{1}{2}, \quad \forall n \geq \alpha(1).$$

Defina $B_1 = B'(x_{\alpha(1)}, 1)$. Suponga elegidos $\alpha(1), \dots, \alpha(k) \in \mathbb{N}$ tales que $\alpha(k-1) < \alpha(k)$,

$$(3.5) \quad d(x_n, x_{\alpha(k)}) < \frac{1}{2^k}, \quad \forall n \geq \alpha(k),$$

y bolas $B_1 = B'(x_{\alpha(1)}, 1), \dots, B_k = B'(x_{\alpha(k)}, 1/2^{k-1})$ tales que $B_{k-1} \supset B_k$. Por la condición de Cauchy, existe $\alpha(k+1) \in \mathbb{N}$, el cual puede ser elegido de tal suerte que $\alpha(k+1) > \alpha(k)$, tal que

$$d(x_n, x_{\alpha(k+1)}) < \frac{1}{2^{k+1}}, \quad \forall n \geq \alpha(k+1).$$

Defina $B_{k+1} = B'(x_{\alpha(k+1)}, 1/2^k)$. Se afirma que $B_k \supset B_{k+1}$. En efecto, si $x \in B_{k+1}$, se sigue de (3.5) que

$$d(x, x_{\alpha(k)}) \leq d(x, x_{\alpha(k+1)}) + d(x_{\alpha(k+1)}, x_{\alpha(k)}) \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}},$$

es decir, $x \in B'(x_{\alpha(k)}, 1/2^{k-1}) = B_k$. Esto prueba la afirmación. Inductivamente se tienen pues construidas una sucesión estrictamente creciente $\{\alpha(n)\}_{n=1}^\infty$ en $\mathbb{N}$ y una sucesión de bolas cerradas $\{B_n\}_{n=1}^\infty$, donde $B_n = B'(x_{\alpha(n)}, 1/2^{n-1})$, tales que, $\forall n \in \mathbb{N}$, se cumplen

$$(3.6) \quad d(x_m, x_{\alpha(n)}) < \frac{1}{2^n}, \quad \forall m \geq \alpha(n),$$

y $B_n \supset B_{n+1}$.

Por hipótesis, existe

$$x \in \bigcap_{n=1}^\infty B_n.$$

Luego $d(x, x_{\alpha(n)}) < 1/2^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, de donde,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_{\alpha(n)}) = 0,$$

es decir, la subsucesión $\{x_{\alpha(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $x \in X$. Necesariamente la sucesión misma $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ debe converger a $x \in X$, por ser ésta de Cauchy. Esto prueba que X es completo. ■

En el Ejercicio 3.9 se pide demostrar que en el teorema de bolas anidadas la sucesión de bolas cerradas anidadas puede ser reemplazada, de hecho, por una sucesión decreciente de conjuntos cerrados arbitrarios cuyo diámetro tiende a cero.

Teorema de Baire

Una consecuencia importante del teorema de bolas anidadas (es decir, de la completez del espacio) es el llamado teorema de categoría de Baire.

3.16 Definición. Sean X un espacio métrico y A un subconjunto de X . Se dice que A es un conjunto **denso en ninguna parte** de X si

$$(\overline{A})^{\circ} = \emptyset.$$

3.5 Lema. Sean X un espacio métrico y A un subconjunto de X . Las afirmaciones siguientes son equivalentes.

i. A es un conjunto denso en ninguna parte de X .

ii. $\mathbb{C}\overline{A}$ es denso en X .

iii. Toda bola abierta B (respectivamente cerrada) de X contiene otra bola abierta $\tilde{B}$ (respectivamente cerrada) tal que $\tilde{B} \cap A = \emptyset$, luego cualquier otra bola con el mismo centro que $\tilde{B}$ y radio menor que el de $\tilde{B}$ también es disjunta de A .

Demostración. (i) implica (ii). Sea B una bola abierta en X . Ya que $(\overline{A})^{\circ} = \emptyset$, se debe tener $B \not\subset \overline{A} = \emptyset$, es decir,

$$B \cap \mathbb{C}\overline{A} \neq \emptyset.$$

Por lo tanto $\mathbb{C}\overline{A}$ es denso en X .

(ii) implica (iii). Sea $B = B'(x, r)$ o $B = B(x, r)$ una bola en X , con $r > 0$. Ya que $\mathbb{C}\overline{A}$ es denso en X , se debe tener

$$B(x, r) \cap \mathbb{C}\overline{A} \neq \emptyset.$$

Sea $y \in B(x, r) \cap \mathbb{C}\bar{A}$. Siendo abiertos en X estos últimos conjuntos, existe $r_0 > 0$ tal que $B(y, r_0) \subset B(x, r) \cap \mathbb{C}\bar{A}$. En particular, $B(y, r_0) \subset B(x, r)$ y $B(y, r_0) \subset \mathbb{C}\bar{A}$, es decir, $B(y, r_0) \cap A = \emptyset$. Si $\tilde{B} = B(y, \varepsilon)$ o $\tilde{B} = B'(y, \varepsilon)$, con $0 < \varepsilon < r_0$, entonces

$$\tilde{B} \subset B(y, r_0) \subset B(x, r) \subset B \quad \text{y} \quad \tilde{B} \cap A = \emptyset.$$

(iii) **implica (i).** Sea B una bola abierta arbitraria en X . Por hipótesis existe otra bola abierta $\tilde{B}$ tal que $\tilde{B} \subset B$ y $\tilde{B} \cap A = \emptyset$. Luego, si $x \in \tilde{B}$, entonces $x \notin \bar{A}$, es decir,

$$\tilde{B} \subset \mathbb{C}\bar{A}.$$

Esto implica que $B \not\subset \bar{A}$. Por lo tanto $(\bar{A})^\circ = \emptyset$, es decir, A es un conjunto denso en ninguna parte de X . ■

3.6 Teorema. (Teorema de Baire.) *Un espacio métrico completo no puede ser escrito como unión de ninguna familia a lo sumo numerable de conjuntos densos en ninguna parte.*

Demostración. Sea X un espacio métrico completo. Suponga contrariamente que

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

donde $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una familia numerable de conjuntos densos en ninguna parte de X (para el caso finito ponga $A_n = \emptyset$ para toda n mayor o igual que alguna $N \in \mathbb{N}$). Sea B_0 una bola cerrada de radio uno. Por la parte (iii) del Lema 3.5, existiría otra bola cerrada B_1 , de radio menor que $1/2$, tal que $B_1 \subset B_0$ y $B_1 \cap A_1 = \emptyset$. Suponga escogidas bolas cerradas $B_0, \dots, B_n$ tales que B_n tiene radio menor que $1/n$, $B_n \subset B_{n-1}$ y $B_n \cap A_n = \emptyset$. Por el Lema 3.5, existiría otra bola cerrada B_{n+1} , de radio menor que $1/(n+1)$, tal que $B_{n+1} \subset B_n$ y $B_{n+1} \cap A_{n+1} = \emptyset$. Inductivamente se tendría pues construida una sucesión decreciente de bolas cerradas cuyos radios tienden a cero y tales que

$$(3.7) \quad B_n \cap A_n = \emptyset, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por el teorema de bolas anidadas, existiría $x \in X$ tal que

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Pero por (3.7), se debería tener

$$x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X,$$

lo cual sería absurdo. ■

Se deja como ejercicio para el lector la prueba de los dos corolarios siguientes.

3.7 Corolario. Si X es un espacio métrico completo y

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

donde $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos cerrados en X , entonces al menos uno de los conjuntos A_n tiene interior no vacío.

3.8 Corolario. Todo espacio métrico completo sin puntos aislados es un conjunto infinito no numerable.

(Observe que en este caso, $\{x\}$ sería un conjunto denso en ninguna parte, $\forall x$.)

Teorema del punto fijo

3.17 Definición. Sea F una función de un espacio métrico X en sí mismo. Se dice que F es una **función contractante** si existe una constante $0 \leq \alpha < 1$ tal que

$$d(F(x), F(y)) \leq \alpha d(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

3.18 Observación. Toda función contractante F de X en X es una función lipschitziana, luego continua en X . En particular, si una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a algún punto $x \in X$, entonces $\{F(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ debe converger a $F(x)$. ◁

Para cualquier función $F : X \rightarrow X$ se define inductivamente $F^1 = F$ y $F^{n+1} = F \circ F^n = F^n \circ F$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

3.9 Teorema. (Teorema del punto fijo.) Si F es una función contractante de un espacio métrico completo X en sí mismo, entonces F posee un único punto fijo, es decir, existe un único punto $x_0 \in X$ tal que

$$F(x_0) = x_0.$$

Además, si $x \in X$ es arbitrario, entonces

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x).$$

Demostración. Sea $0 \leq \alpha < 1$ tal que

$$(3.8) \quad d(F(x), F(y)) \leq \alpha d(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Fije arbitrariamente $x \in X$ y defina $x_n = F^n(x)$. Se afirma que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en X . En efecto, $\forall n, m \in \mathbb{N}$ tales que $m > n$, se tiene

$$(3.9) \quad \begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(F^n(x), F^m(x)) \\ &\leq \alpha^n d(x, F^{m-n}(x)) \\ &\leq \alpha^n [d(x, F(x)) + \cdots + d(F^{m-n-1}(x), F^{m-n}(x))] \\ &\leq \alpha^n [d(x, F(x)) + \cdots + \alpha^{m-n-1} d(x, F(x))] \\ &= \alpha^n d(x, F(x)) [1 + \cdots + \alpha^{m-n-1}] \\ &\leq \alpha^n \frac{d(x, F(x))}{1 - \alpha}, \end{aligned}$$

donde la primera y tercera desigualdades se cumplen por (3.8) y la segunda, por la desigualdad triangular. Ya que $0 \leq \alpha < 1$, necesariamente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n \frac{d(x, F(x))}{1 - \alpha} = 0.$$

Se sigue de esto y de (3.9) que

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 0.$$

Esto prueba la afirmación.

Por ser X completo existe $x_0 \in X$ tal que

$$(3.10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0.$$

De acuerdo a la Observación 3.18 se debe tener

$$(3.11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = F(x_0).$$

Pero la sucesión $\{F(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es la subsucesión $\{x_n\}_{n=2}^{\infty}$ de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Por (3.10), se tiene pues

$$(3.12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x_0.$$

Se concluye de (3.11) y (3.12) que $F(x_0) = x_0$, es decir, que x_0 es un punto fijo de F .

Si x'_0 es otro punto fijo de F , entonces

$$d(x_0, x'_0) = d(F(x_0), F(x'_0)) \leq \alpha d(x_0, x'_0).$$

Como $0 \leq \alpha < 1$, la desigualdad anterior se cumple si y sólo si $d(x_0, x'_0) = 0$, es decir, $x_0 = x'_0$. Por lo tanto, x_0 es el único punto fijo de F . ■

3.19 Ejemplo. La sola condición

$$d(F(x), F(y)) < d(x, y), \quad \forall x, y \in X,$$

no es suficiente para que F posea algún punto fijo, aunque X sea completo. En efecto, el subespacio métrico $[1, \infty[$ de $\mathbb{R}$ (con la distancia usual) es completo, por ser éste un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$ (vea el Teorema 3.2), y la función $F : [1, \infty[\rightarrow [1, \infty[$ dada por

$$F(x) = x + \frac{1}{x}, \quad \forall x \geq 1,$$

satisface

$$|F(x) - F(y)| = |x - y| \left[1 - \frac{1}{xy} \right] < |x - y|, \quad \forall x, y \geq 1.$$

Sin embargo,

$$F(x) = x + 1/x \neq x, \quad \forall x \geq 1,$$

es decir, F no tiene puntos fijos en $[1, \infty[$. ◀

3.20 Ejemplo. Demuestre que la ecuación

$$(3.13) \quad x^{1/2} - x + \frac{\sin 2x}{4} + \pi = 0$$

tiene una solución única en el intervalo $[\pi, \infty[$.

Observe primero que la ecuación (3.13) tiene solución única en dicho intervalo si y sólo si la ecuación

$$(3.14) \quad x^{1/2} + \frac{\sin 2x}{4} + \pi = x$$

tiene solución única en $[\pi, \infty[$. Sea

$$F(x) = x^{1/2} + \frac{\sin 2x}{4} + \pi, \quad \forall x \geq \pi.$$

Entonces F es una función que transforma $[\pi, \infty[$ en $[\pi, \infty[$, pues

$$x^{1/2} + \frac{\sin 2x}{4} + \pi \geq \pi^{1/2} - \frac{1}{4} + \pi \geq \pi, \quad \forall x \geq \pi,$$

y es contractante, pues, por el Teorema del Valor Medio, $\forall y > x \geq \pi$ existe $t \in]x, y[$ tal que

$$|F(x) - F(y)| = |F'(t)||x - y| = \left| \frac{1}{2t^{1/2}} + \frac{\cos 2t}{2} \right| |x - y| \leq \left(\frac{1}{2\pi^{1/2}} + \frac{1}{2} \right) |x - y|.$$

Luego,

$$|F(x) - F(y)| \leq \alpha |x - y|, \quad \forall x, y \in [\pi, \infty[,$$

donde

$$\alpha = \frac{1}{2\pi^{1/2}} + \frac{1}{2}$$

es una constante tal que $0 \leq \alpha < 1$.

Por el Teorema del Punto Fijo existe en $[\pi, \infty[$ una solución única de la ecuación (3.14), equivalentemente, de la ecuación (3.13). ◀

Un procedimiento similar al del Ejemplo 3.20 sirve para demostrar el resultado siguiente.

3.10 Corolario. *Considere el subespacio métrico $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$) con la distancia usual. Si una función $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ satisface las condiciones siguientes:*

- i. *f es continua en $[a, b]$,*
- ii. *f es derivable en $]a, b[$,*
- iii. *Existe $0 \leq \alpha < 1$ tal que $|f'(x)| \leq \alpha$, $\forall x \in]a, b[$,*

entonces f posee un único punto fijo en $[a, b]$.

Haga la demostración como ejercicio.

Completación

Se demostrará que cualquier espacio métrico puede ser mínimamente “aumentado” hasta convertirlo en un espacio métrico completo, “agregándole” los posibles límites faltantes de sus sucesiones de Cauchy.

3.21 Definición. *Sean (X, d) y (Y, ρ) dos espacios métricos. Se dice que Y es una **completación** de X si Y es completo y X es isométrico a algún subconjunto denso de Y (vea la*

Definición 2.83).

3.22 Ejemplo. Si X es un espacio métrico completo, entonces X es una completación de cualquiera de sus subespacios métricos que sean conjuntos densos, en particular, X es una completación de sí mismo (en estos casos la isometría empleada sería la función identidad). Por ejemplo, $\mathbb{R}$ con la distancia usual es una completación de sus subespacios métricos: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{I}$. ◀

La completación de un espacio métrico es única en el sentido siguiente.

3.11 Teorema. (Unicidad de la completación.) Para todo par de espacios métricos (Y, ρ) y (Z, σ) que sean completaciones de un espacio métrico (X, d) y para todo par de isometrías i y j de X en los subespacios densos $i(X)$ y $j(X)$ de Y y Z , respectivamente, existe una única isometría f de Y sobre Z tal que $f \circ i = j$.

Demostración. Unicidad de la isometría. Suponga que f y f' son dos isometrías de Y sobre Z tales que $f \circ i = j$ y $f' \circ i = j$. Fije $y \in Y$. Como $i(X)$ es denso en Y , existe una sucesión $\{i(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a y . Entonces las sucesiones $\{f(i(x_n))\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{f'(i(x_n))\}_{n=1}^{\infty}$ deben converger a $f(y)$ y $f'(y)$, respectivamente. Como ambas sucesiones son iguales a la sucesión $\{j(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ en $j(X)$, necesariamente $f(y) = f'(y)$, $\forall y \in Y$, es decir, $f = f'$.

Existencia de la isometría. Fije $y \in Y$. Como $i(X)$ es denso en Y , existe una sucesión $\{i(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a y . Ya que i es isometría, la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ debe ser de Cauchy en X . Por la misma razón, la sucesión $\{j(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $j(X)$. Siendo Z completo, existe un elemento $f(y)$ de Z que debe ser el límite de $\{j(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$.

Se afirma que si $\{i(x'_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es otra sucesión en $i(X)$ que converge a y , entonces $\{j(x'_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $j(X)$ que converge al mismo punto $f(y)$ de Z . En efecto, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} i(x_n) = y = \lim_{n \rightarrow \infty} i(x'_n),$$

pero, por ser i y j isometrías,

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(i(x_n), i(x'_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(j(x_n), j(x'_n)).$$

Así pues,

$$f(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} j(x_n) \quad \implies \quad \lim_{n \rightarrow \infty} j(x'_n) = f(y).$$

Esto prueba que la función $f : Y \rightarrow Z$, $y \mapsto f(y)$, está bien definida.

Se afirma ahora que f es una isometría de Y en Z . En efecto, sean $u, v \in Y$ y dos sucesiones $\{i(u_n)\}_{n=1}^\infty$, $\{i(v_n)\}_{n=1}^\infty$ en $i(X)$ que converjan a u y v en Y , respectivamente. Por definición de f , se tiene

$$f(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} j(u_n) \quad \text{y} \quad f(v) = \lim_{n \rightarrow \infty} j(v_n).$$

Además,

$$\rho(i(u_n), i(v_n)) = d(u_n, v_n) = \sigma(j(u_n), j(v_n)), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Entonces

$$\rho(u, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(i(u_n), i(v_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(j(u_n), j(v_n)) = \sigma(f(u), f(v)).$$

Esto prueba la afirmación.

Se afirma finalmente que $f : Y \rightarrow Z$ es suprayectiva. En efecto, fije $z \in Z$. Como $j(X)$ es denso en Z , existe una sucesión $\{j(x_n)\}_{n=1}^\infty$ que converge a z . Por ser j e i isometrías, las sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{i(x_n)\}_{n=1}^\infty$ deben ser de Cauchy en X y Y , respectivamente. Siendo Y completo, existe un elemento y de Y que debe ser el límite de $\{i(x_n)\}_{n=1}^\infty$. Se sigue entonces de la definición de f que

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} j(x_n) = f(y).$$

Esto prueba la afirmación. ■

3.12 Teorema. (Existencia de la completación.) *Para todo espacio métrico (X, d) existe una única completación.*

Demostración. La unicidad de la completación ya fue demostrada en el Teorema 3.11.

Denote por X' el conjunto formado por todas las sucesiones de Cauchy en X . $\forall x, y \in X'$, digamos $x = \{x(n)\}_{n=1}^\infty$ y $y = \{y(n)\}_{n=1}^\infty$ (conviene emplear esta notación de sucesión para denotar los puntos de X' pues sus elementos son sucesiones), se dice que x y y son equivalentes si ambas muestran una tendencia a converger a un mismo límite (aún si éste no

existe), es decir,

$$(3.15) \quad x \sim y \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d(x(n), y(n)) = 0.$$

Se verifica de inmediato (Ejercicio) que $\sim$ es una relación de equivalencia sobre X' . Denote por X^* al conjunto de todas las clases de equivalencia x^* de X' bajo la relación $\sim$. Recuerde que los elementos de X^* son en realidad subconjuntos de X' que forman una partición X' . Se definirá a continuación una métrica ρ sobre X^* .

Sean $x^*, y^* \in X^*$. Observe que si $x = \{x(n)\}_{n=1}^\infty \in x^*$ y $y = \{y(n)\}_{n=1}^\infty \in y^*$, entonces $\{d(x(n), y(n))\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ con la distancia usual. En efecto, se sigue fácilmente de la desigualdad del triángulo (vea el Ejercicio 2.2) que

$$|d(x(n), y(n)) - d(x(m), y(m))| \leq d(x(n), x(m)) + d(y(n), y(m)), \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Siendo de Cauchy en X ambas sucesiones $\{x(n)\}_{n=1}^\infty$ y $\{y(n)\}_{n=1}^\infty$, se sigue de la desigualdad anterior que $\{d(x(n), y(n))\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Por la completez de $\mathbb{R}$, la sucesión $\{d(x(n), y(n))\}_{n=1}^\infty$ debe converger a algún número real.

Se afirma que si se toman otros representantes $x' = \{x'(n)\}_{n=1}^\infty \in x^*$ y $y' = \{y'(n)\}_{n=1}^\infty \in y^*$, entonces

$$(3.16) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d(x'(n), y'(n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x(n), y(n)).$$

En efecto, nuevamente por el Ejercicio 2.2, se tiene

$$|d(x(n), y(n)) - d(x'(n), y'(n))| \leq d(x(n), x'(n)) + d(y(n), y'(n)), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ya que el lado derecho tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$, por (3.15), se debe cumplir (3.16). Esto prueba la afirmación.

Se define entonces la función $\rho : X^* \times X^* \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\rho(x^*, y^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x(n), y(n)), \quad \forall x^*, y^* \in X^*,$$

donde $x = \{x(n)\}_{n=1}^\infty \in x^*$ y $y = \{y(n)\}_{n=1}^\infty \in y^*$ se escogen arbitrariamente. Se afirma ahora que ρ es una métrica sobre X^* . En efecto, claramente se cumplen $\rho(x^*, y^*) \geq 0$ y $\rho(x^*, y^*) = \rho(y^*, x^*)$, $\forall x^*, y^* \in X^*$. Además, $\forall x^*, y^*, z^* \in X^*$ escogiendo arbitrariamente

representantes $x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in x^*$ y $y = \{y(n)\}_{n=1}^{\infty} \in y^*$ y $z = \{z(n)\}_{n=1}^{\infty} \in z^*$, se tiene que

$$d(x(n), z(n)) \leq d(x(n), y(n)) + d(y(n), z(n)), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

implica

$$\rho(x^*, z^*) \leq \rho(x^*, y^*) + \rho(y^*, z^*).$$

Finalmente, se cumple

$$\rho(x^*, y^*) = 0 \quad \text{ssi} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d(x(n), y(n)) = 0 \quad \text{ssi} \quad x \sim y \quad \text{ssi} \quad x^* = y^*.$$

Esto prueba la afirmación.

Se verificará enseguida que (X, d) es isométrico a un subespacio métrico denso de (X^*, ρ) . Note que $\forall x \in X$, la sucesión constante de valor x , es decir, la sucesión $\underline{x} = \{\underline{x}(n)\}_{n=1}^{\infty} = \{x\}_{n=1}^{\infty}$, es un elemento de X' . Defina entonces $i(x) = (\underline{x})^* \in X^*$. La función $i : X \rightarrow X^*$, $x \mapsto i(x) = (\underline{x})^*$, es una isometría de X sobre el subespacio métrico $i(X)$ de X^* , pues

$$\rho(i(x), i(y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(\underline{x}(n), \underline{y}(n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, y) = d(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Por lo tanto, i es una isometría de X sobre $i(X)$. Para ver que $i(X)$ es denso en X^* , fije $x^* \in X^*$ y sea $\varepsilon > 0$. Si $x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty}$ es un representante de x^* , es decir, un elemento de x^* , entonces $\{x(n)\}_{n=1}^{\infty} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en X (aquí, $x(n)$ denotará al n -ésimo término de la sucesión x mientras que x_n se interpretará como el punto $x(n)$ de X). Luego existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_N, x_m) < \varepsilon, \quad \forall m \geq N.$$

Esto significa que

$$\rho(i(x_N), x^*) = \lim_{m \rightarrow \infty} d(\underline{x}_N(m), x(m)) = \lim_{m \rightarrow \infty} d(x_N, x_m) \leq \varepsilon.$$

Así pues, $B'(x^*, \varepsilon) \cap i(X) \neq \emptyset$. Por lo tanto, $i(X)$ es denso en X^* .

Se afirma finalmente que (X^*, ρ) es completo. En efecto, según la Proposición 3.1 basta probar que cualquier sucesión de Cauchy $\{i(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ en el conjunto denso $i(X)$ de X^* converge a algún elemento de X^* . Sea pues $\varepsilon > 0$. Como $i : X \rightarrow i(X)$ es isometría, la

sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ debe ser de Cauchy en X . Existe pues $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$(3.17) \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N.$$

Defina $x \in X'$ como la sucesión de Cauchy $x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X y considere el correspondiente elemento $x^* \in X^*$. Se tiene que $n \geq N$ implica

$$\rho(i(x_n), x^*) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} d(\underline{x_n}(\nu), x(\nu)) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} d(x_n, x_\nu) \leq \varepsilon,$$

por (3.17), es decir, que la sucesión $\{i(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge al punto $x^* \in X^*$. Esto prueba la afirmación. ■

Observe que la construcción de la completación X^* de X es esencialmente la misma que la empleada en la construcción de los números reales a partir de los números racionales.

3.2. Espacios métricos compactos

La noción de compacidad se relaciona con la idea de que el espacio métrico en consideración no sea muy extenso, con orillas bien determinadas y que esté lo suficientemente apretado para que sea fácil de transportar.

Caracterizaciones por abiertos y cerrados

3.23 Definición. Una familia de conjuntos abiertos $\{G_i\}_{i \in I}$ de un espacio métrico X se llama **cubierta abierta** de X si

$$X \subset \bigcup_{i \in I} G_i.$$

Una **subcubierta** de la cubierta abierta $\{G_i\}_{i \in I}$ es cualquier subfamilia $\{G_j\}_{j \in J}$, con $J \subset I$, que es a su vez una cubierta abierta de X , es decir, tal que

$$X \subset \bigcup_{j \in J} G_j.$$

3.24 Definición. Un espacio métrico X es un **espacio métrico compacto** si toda cubierta abierta de X posee una subcubierta finita.

El resultado siguiente asegura que en realidad no es necesario considerar todas las posibles cubiertas abiertas del espacio para determinar su posible compacidad cuando se dispone de una base de la topología del espacio.

3.25 Definición. Si $\mathcal{B}$ es una base de la topología de X , cualquier cubierta de abierta de X formada por elementos de $\mathcal{B}$ se llama **cubierta abierta básica** de X .

3.13 Teorema. Un espacio métrico X es compacto si y sólo si cualquier cubierta básica de X posee una subcubierta finita.

Demostración. Como toda cubierta abierta básica de X es una cubierta abierta, la condición es claramente necesaria.

Suficiencia. Sea $\mathcal{B}$ una base de la topología de X y suponga que se cumpla la condición para esta base. Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta arbitraria de X . Recuerde que G_i es la unión de algunos elementos de $\mathcal{B}$. Defina

$$\mathcal{C} = \{B \in \mathcal{B} \mid \exists i \in I \text{ tal que } B \subset G_i\}.$$

Entonces $\mathcal{C}$ es una cubierta abierta básica de X (porque la unión de los elementos de $\mathcal{C}$ coincide con la de los elementos de $\{G_i\}_{i \in I}$). Sea $\{B_1, \dots, B_n\}$ una subcubierta finita de $\mathcal{C}$. Para $k = 1, \dots, n$ sea $i(k) \in I$ tal que $B_k \subset G_{i(k)}$. Se tiene

$$X \subset \bigcup_{k=1}^n B_k \subset \bigcup_{k=1}^n G_{i(k)},$$

es decir, $\{G_{i(1)}, \dots, G_{i(n)}\}$ una subcubierta finita de $\{G_i\}_{i \in I}$. Por lo tanto X es compacto. ■

3.26 Definición. Sea S un subconjunto de un espacio métrico X . Se dice que S es un **conjunto compacto** si S es un espacio métrico compacto como subespacio métrico de X , es decir, si toda cubierta de S por abiertos de S contiene una subcubierta finita.

3.14 Teorema. Un subconjunto S de un espacio métrico X es un conjunto compacto si y sólo si toda cubierta abierta de S por abiertos de X contiene una subcubierta finita.

Demostración. Suponga que S es un conjunto compacto en X . Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una cubierta de S por abiertos de X . Entonces $\{G_i \cap S\}_{i \in I}$ una cubierta de S por abiertos de S . Luego, existen $i(1), \dots, i(n) \in I$ tales que

$$S \subset \bigcup_{k=1}^n (G_{i(k)} \cap S) \subset \bigcup_{k=1}^n G_{i(k)}.$$

Así pues, $G_{i(1)}, \dots, G_{i(n)}$ es una subcubierta finita de $\{G_i\}_{i \in I}$.

Suponga ahora que se cumpla la condición. Sea $\{H_i\}_{i \in I}$ una cubierta de S por abiertos de S . Como $H_i = G_i \cap S$, donde G_i es un conjunto abierto en X , $\forall i \in I$, entonces $\{G_i\}_{i \in I}$ debe ser una cubierta de S por abiertos de X . Existen pues $i(1), \dots, i(n) \in I$ tales que

$$S \subset \bigcup_{k=1}^n G_{i(k)},$$

de donde

$$S \subset \bigcup_{k=1}^n (G_{i(k)} \cap S) = \bigcup_{k=1}^n H_{i(k)}.$$

Por lo tanto, S es un conjunto compacto en X . ■

3.27 Ejemplo. Si $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión en un espacio métrico X que converge a un punto $x \in X$, entonces

$$A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$$

es un conjunto compacto en X .

En efecto, sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta de A . Entonces, $x \in G_{i(0)}$ para algún $i(0) \in I$. Siendo $G_{i(0)}$ abierto en X , existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n \in G_{i(0)}, \quad \forall n > N.$$

También existen $i(1), \dots, i(N) \in I$ tales que $x_k \in G_{i(k)}$, $k = 1, \dots, N$. Entonces una subcubierta finita de $\{G_i\}_{i \in I}$ sería $\{G_{i(0)}, G_{i(1)}, \dots, G_{i(N)}\}$. Por el Teorema 3.14, A es un conjunto compacto en X . ◁

3.28 Ejemplo. Todo intervalo cerrado y acotado en $\mathbb{R}$ (con la distancia usual) es un conjunto compacto.

En efecto, sea $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, un intervalo cerrado y acotado en $\mathbb{R}$. Sea $\mathcal{C}$ una cubierta de $[a, b]$ por conjuntos abiertos de $\mathbb{R}$. Defina

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \text{ y existe un subcubierta finita de } [a, x] \text{ de la cubierta } \mathcal{C}\}.$$

Note que $a \in E$ y que b es una cota superior de E . Luego, E es un conjunto no vacío y acotado superiormente en $\mathbb{R}$. Existe pues en $\mathbb{R}$,

$$c = \sup E,$$

de hecho, $a \leq c \leq b$.

Como $\mathcal{C}$ es cubierta de $[a, b]$, existe $G \in \mathcal{C}$ tal que $c \in G$. Siendo G un conjunto abierto en $\mathbb{R}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$]c - \varepsilon, c + \varepsilon[\subset G.$$

Puesto que $c - \varepsilon$ no puede ser cota superior de E , existe $x \in E$ tal que $c - \varepsilon < x$. Por definición de E , existen $G_1, \dots, G_n$ en $\mathcal{C}$ que recubren al intervalo $[a, x]$. Entonces $\{G_1, \dots, G_n, G\}$ es una cubierta del intervalo $[a, c + \varepsilon]$, luego de $[a, y]$, $\forall y \in]c, c + \varepsilon[$.

Por otra parte, si $y \in]c, c + \varepsilon[$, entonces $y \notin E$ (por ser c el supremo de E). Otra vez por definición de E , se debe tener $b < y$, $\forall y \in]c, c + \varepsilon[$. Esto implica que $b \leq c$, o sea, que $c = b$. Así pues, $\{G_1, \dots, G_n, G\}$ es una cubierta finita del intervalo $[a, b]$ por elementos de $\mathcal{C}$. Se concluye del Teorema 3.14 que $[a, b]$ es conjunto compacto en $\mathbb{R}$. ◀

3.29 Ejemplo. El sistema ampliado de los números reales $\overline{\mathbb{R}}$ es un espacio métrico compacto.

En efecto, recuerde que la familia $\mathcal{B}$ formada por los intervalos $]a, b[$, $]M, +\infty]$ y $[-\infty, m[$, donde $a, b, M, m \in \mathbb{R}$ y $a < b$, $M > 0$ y $m < 0$, constituyen una base para la topología de $\overline{\mathbb{R}}$. Sea pues $\mathcal{C}$ una cubierta básica de $\overline{\mathbb{R}}$. Por ser $\mathcal{C}$ cubierta, existen $M > 0$ y $m < 0$ tales que $[-\infty, m[$, $]M, +\infty] \in \mathcal{C}$.

Recuerde que los conjuntos abiertos en el subespacio métrico $[m, M]$ de $\overline{\mathbb{R}}$ son los mismos que los conjuntos abiertos del subespacio métrico $[m, M]$ de $\mathbb{R}$ con la distancia usual. Por el Ejemplo 3.27, el conjunto $[m, M]$, que es compacto en $\mathbb{R}$ con la distancia usual, debe ser compacto en $\overline{\mathbb{R}}$. Como $\mathcal{C}$ recubre a $[m, M]$ con abiertos de $\overline{\mathbb{R}}$, existen $G_1, \dots, G_n \in \mathcal{C}$ tales que

$$[m, M] \subset \bigcup_{k=1}^n G_k.$$

Se concluye que $\{[-\infty, m[, G_1, \dots, G_n,]M, +\infty]\}$ es una subcubierta de $\overline{\mathbb{R}}$ de la cubierta básica $\mathcal{C}$. Por el Teorema 3.13, $\overline{\mathbb{R}}$ es un espacio métrico compacto. ◀

Se deja como ejercicio para el lector la demostración del resultado siguiente.

3.15 Proposición. La unión de cualquier familia finita de conjuntos compactos en un es-

pacio métrico es un conjunto compacto. En particular, todo subconjunto finito de un espacio métrico debe ser un conjunto compacto.

Se tiene el siguiente resultado básico que caracteriza la compacidad por medio de conjuntos cerrados.

3.16 Teorema. (Propiedad de intersección finita.) *Para un espacio métrico X las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- i.** X es compacto.
- ii.** Toda familia de conjuntos cerrados en X cuya intersección es el vacío contiene una subfamilia finita con intersección vacía.
- iii.** Toda familia de conjuntos cerrados en X tal que cualquier subfamilia finita tenga intersección no vacía, tiene intersección no vacía.

Demostración. Las afirmaciones (ii) y (iii) son claramente equivalentes.

(i) implica (ii). Sea $\{F_i\}_{i \in I}$ una familia arbitraria de conjuntos cerrados en X tal que

$$\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset.$$

Entonces $\{\mathbb{C} F_i\}_{i \in I}$ es una familia de conjuntos abiertos en X tal que

$$\bigcup_{i \in I} \mathbb{C} F_i = X,$$

por las Leyes de De Morgan. Por hipótesis, existen $i(1), \dots, i(n) \in I$ tales que

$$\bigcup_{k=1}^n \mathbb{C} F_{i(k)} = X,$$

es decir,

$$\bigcap_{k=1}^n F_{i(k)} = \emptyset.$$

(ii) implica (i). Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta de X . Entonces $\{\mathbb{C} G_i\}_{i \in I}$ es una familia de conjuntos cerrados en X cuya intersección es el vacío (por las Leyes de De Morgan). Por hipótesis existen $i(1), \dots, i(n) \in I$ tales que

$$\bigcap_{k=1}^n \mathbb{C} G_{i(k)} = \emptyset,$$

es decir,

$$\bigcup_{k=1}^n G_{i(k)} = X,$$

o sea, que $\{G_{i(k)}\}_{k=1}^n$ es una subcubierta finita de X . Por lo tanto, X es compacto. ■

El siguiente resultado es consecuencia directa (Ejercicio) del Teorema 3.16 y del Teorema de bolas anidadas (Teorema 3.4).

3.17 Proposición. *En espacios métricos, un conjunto compacto es un subespacio métrico completo.*

Se sigue de la proposición anterior y del Teorema 3.2 el resultado siguiente (Ejercicio).

3.18 Corolario. *En espacios métricos, todo conjunto compacto es un conjunto cerrado.*

3.19 Proposición. *En espacios métricos compactos, cualquier conjunto cerrado es un conjunto compacto.*

Demostración. Sea A un conjunto cerrado en un espacio métrico compacto X . Recuerde que todo conjunto cerrado en el subespacio métrico A es un conjunto cerrado en X (vea el Teorema 2.28). Si $\mathcal{F}$ es una familia de conjuntos cerrados en el subespacio A cuya intersección es vacía, entonces $\mathcal{F}$ es una familia de conjuntos cerrados en X con intersección vacía, luego $\mathcal{F}$ contiene una subfamilia finita con intersección vacía, por el Teorema 3.16. Por ese mismo resultado, A debe ser un subespacio métrico compacto. ■

Caracterización por sucesiones y puntos de acumulación

Se analiza la versión para sucesiones del concepto de compacidad demostrando la equivalencia entre los conceptos de compacidad, compacidad secuencial y semicompacidad, es decir, espacios con la propiedad de Bolzano-Weierstrass.

3.30 Definición. *Un espacio métrico X se dice que es **secuencialmente compacto** si cualquier sucesión en X contiene una subsucesión convergente.*

3.20 Lema. *Sea X un espacio métrico.*

i. *Si toda sucesión en X contiene una subsucesión de Cauchy, entonces para cada $\varepsilon > 0$*

existe un conjunto finito

$$A_\varepsilon = \{a_1, \dots, a_n\}$$

de puntos de A tal que las bolas abiertas $\{B(a_1, \varepsilon), \dots, B(a_n, \varepsilon)\}$ forman una cubierta de X .

En particular, esto se cumple si X es secuencialmente compacto.

El enunciado anterior es equivalente al siguiente.

ii. Si existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que ninguna familia finita de bolas abiertas de radio ε_0 forma una cubierta de X , entonces existe una sucesión en X tal que ninguna de sus subsucesiones es de Cauchy. En particular, X no puede ser secuencialmente compacto si se cumple esta condición.

Demostración. Suponga que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que ninguna familia finita de bolas abiertas de radio ε_0 es cubierta de X . Sea $a_1 \in X$ arbitrario. Suponga elegidos $a_1, \dots, a_k \in X$ tales que

$$d(a_i, a_j) \geq \varepsilon_0, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, k\}, i \neq j.$$

Por hipótesis, el conjunto $X \setminus \bigcup_{i=1}^k B(a_i, \varepsilon_0)$ es no vacío. Existe pues un elemento

$$a_{k+1} \in X \setminus \bigcup_{i=1}^k B(a_i, \varepsilon_0).$$

Entonces,

$$d(a_i, a_j) \geq \varepsilon_0, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, k+1\}, i \neq j.$$

Inductivamente se tiene entonces construida una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ en X tal que

$$d(a_i, a_j) \geq \varepsilon_0, \quad \forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j.$$

Claramente ninguna subsucesión de $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ satisface la condición de Cauchy. Luego se cumple (ii), equivalentemente (i). ■

3.21 Lema. Sea X un espacio métrico. Si para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito

$$A_\varepsilon = \{a_1, \dots, a_n\}$$

de puntos de A tal que las bolas abiertas $\{B(a_1, \varepsilon), \dots, B(a_n, \varepsilon)\}$ forman una cubierta de X , entonces X es separable. En particular, todo espacio métrico secuencialmente compacto es

separable.

Demostración. Considere el conjunto finito $A_{1/n}$ dado por la hipótesis, $\forall n \in \mathbb{N}$. Se afirma que el conjunto a lo sumo numerable

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{1/n}$$

es denso en X . En efecto, sean $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ arbitrarios. Puesto que $x \in B(a_{n,i}, 1/n)$ para algún $i \in \{1, \dots, k_n\}$, para este i se cumple

$$d(x, a_{n,i}) < \frac{1}{n},$$

es decir,

$$\emptyset \neq B(x, 1/n) \cap A_{1/n} \subset B(x, 1/n) \cap D.$$

Luego, toda bola con centro en x y radio positivo tiene intersección no vacía con D , es decir, D es denso en X . Por lo tanto, X es separable. En particular, si X es secuencialmente compacto, por el Lema 3.20, se cumplen las hipótesis del presente lema, por lo tanto X es separable. ■

3.22 Teorema. *Todo espacio secuencialmente compacto es compacto.*

Demostración. Sea X un espacio métrico secuencialmente compacto. Por el Lema 3.21, X es separable. Se sigue entonces del Teorema 2.26 que la topología de X posee una base $\mathcal{B}$ a lo sumo numerable. Se probará que toda cubierta abierta básica de X posee una subcubierta finita. Luego, por el Teorema 3.13, X será compacto.

Sea pues $\mathcal{C}$ una cubierta abierta básica de X . Como $\mathcal{C}$ es un subconjunto de $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ también es un conjunto a lo sumo numerable. Se procederá por reducción al absurdo para probar que $\mathcal{C}$ posee una subcubierta finita.

Suponga pues que $\mathcal{C}$ no posee subcubiertas finitas. Como $\mathcal{C}$ es a lo sumo numerable, entonces $\mathcal{C}$ debe ser, de hecho, numerable, digamos

$$\mathcal{C} = \{C_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

Se afirma que existe una subcubierta numerable $\{C_{\alpha(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ de $\mathcal{C}$ tal que

$$C_{\alpha(n)} \setminus \left[\bigcup_{i=1}^{n-1} C_{\alpha(i)} \right] \neq \emptyset, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

donde uniones vacías son iguales al conjunto vacío, por convención. Defina $\alpha(1) = 1$. Como $\{C_{\alpha(1)}\}$ no puede ser cubierta de X , existe un primer natural $\alpha(2)$ tal que $\alpha(2) > \alpha(1)$ y $C_{\alpha(2)} \not\subset C_{\alpha(1)}$. Observe que

$$C_{\alpha(1)} \cup C_{\alpha(2)} = \bigcup_{i=1}^{\alpha(2)} C_i.$$

Suponga elegidos naturales $\alpha(1), \dots, \alpha(k)$ tales que $\alpha(k-1) < \alpha(k)$,

$$C_{\alpha(k)} \setminus \left[\bigcup_{i=1}^{k-1} C_{\alpha(i)} \right] \neq \emptyset$$

y

$$\bigcup_{i=1}^k C_{\alpha(i)} = \bigcup_{j=1}^{\alpha(k)} C_j.$$

Puesto que $\{C_{\alpha(1)}, \dots, C_{\alpha(k)}\}$ no puede ser cubierta de X , existe un primer natural $\alpha(k+1)$ tal que $\alpha(k+1) > \alpha(k)$ y

$$C_{\alpha(k+1)} \not\subset \bigcup_{i=1}^k C_{\alpha(i)}.$$

Luego,

$$\bigcup_{i=1}^{k+1} C_{\alpha(i)} = \bigcup_{j=1}^{\alpha(k+1)} C_j.$$

Se tiene pues construida inductivamente una subfamilia infinita $\{C_{\alpha(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ de $\mathcal{C}$ tal que

$$C_{\alpha(n)} \setminus \left[\bigcup_{i=1}^{n-1} C_{\alpha(i)} \right] \neq \emptyset \quad \text{y} \quad \bigcup_{i=1}^n C_{\alpha(i)} = \bigcup_{j=1}^{\alpha(n)} C_j, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Esto prueba la afirmación. En particular, $\{C_{\alpha(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ debe recubrir a X , es decir, $\{C_{\alpha(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ es una subcubierta de $\mathcal{C}$ y

$$C_{\alpha(n)} \setminus \left[\bigcup_{i=1}^{n-1} C_{\alpha(i)} \right] \neq \emptyset, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se puede escoger entonces

$$(3.18) \quad x_n \in C_{\alpha(n)} \setminus \left[\bigcup_{i=1}^{n-1} C_{\alpha(i)} \right], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se afirma que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no tiene subsucesiones convergentes. En efecto, fije arbitrariamente un punto $x \in X$. Por ser $\{C_{\alpha(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ una cubierta de X , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in C_{\alpha(n_0)}$. Pero, por (3.18),

$$x_n \notin C_{\alpha(n_0)}, \quad \forall n > n_0.$$

Entonces ninguna subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ puede converger a x . Esto prueba la afirmación. Pero esto sería absurdo porque X es secuencialmente compacto. ■

3.31 Definición. Se dice que un espacio métrico X es **semicompacto** o que tiene la **propiedad de Bolzano-Weierstrass** si todo subconjunto infinito de X posee al menos un punto de acumulación en X .

3.23 Teorema. Todo espacio métrico compacto es semicompacto.

Demostración. Sea X un espacio métrico compacto. Para probar que X es semicompacto se mostrará equivalentemente que todo subconjunto de X sin puntos de acumulación en X es finito. Sea A un subconjunto de X tal que $A' = \emptyset$, es decir, sin puntos de acumulación en X . Dado cualquier $x \in X$ existe pues un conjunto abierto G_x en X tal que $x \in G_x$ y

$$(3.19) \quad [G_x \setminus \{x\}] \cap A = \emptyset.$$

Como $\{G_x\}_{x \in X}$ es una cubierta abierta de X , existen $x(1), \dots, x(n) \in X$ tales que

$$X = \bigcup_{i=1}^n G_{x(i)}.$$

Ya que $A \subset X$, se debe tener

$$\begin{aligned} A \setminus \{x(1), \dots, x(n)\} &= (X \cap A) \setminus \{x(1), \dots, x(n)\} = \left[\bigcup_{i=1}^n (G_{x(i)} \setminus \{x(1), \dots, x(n)\}) \right] \cap A \\ &\subset \left[\bigcup_{i=1}^n (G_{x(i)} \setminus \{x(i)\}) \right] \cap A = \bigcup_{i=1}^n [(G_{x(i)} \setminus \{x(i)\}) \cap A] = \emptyset, \end{aligned}$$

por (3.19). Entonces

$$A \subset \{x(1), \dots, x(n)\},$$

es decir, A es un conjunto finito. ■

3.24 Teorema. *Todo espacio semicompacto es secuencialmente compacto.*

Demostración. Sea X un espacio semicompacto y sea $x : \mathbb{N} \rightarrow X$, $n \mapsto x(n) = x_n$, una sucesión arbitraria en X . Se debe probar que x posee una subsucesión convergente en X .

Suponga primero que $x(\mathbb{N}) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto finito en X , es decir, que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ toma solamente un número finito de valores distintos, digamos $a_1, \dots, a_N$, es decir, $x(\mathbb{N}) = \{a_1, \dots, a_N\}$. En este caso,

$$\mathbb{N} = \bigcup_{k=1}^N x^{-1}(\{a_k\}),$$

luego $x^{-1}(\{a_k\})$ debe ser un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ para algún $k \in \{1, \dots, N\}$. Así pues, $x^{-1}(\{a_k\}) \sim \mathbb{N}$. Si $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow x^{-1}(\{a_k\})$ es biyectiva y estrictamente creciente, entonces $x \circ \alpha : \mathbb{N} \rightarrow X$ es una subsucesión de $x : \mathbb{N} \rightarrow X$ tal que $x(\alpha(n)) = x_{\alpha(n)} = a_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, o sea, que la subsucesión $x \circ \alpha$ es constante de valor a_k . Dicha subsucesión converge entonces a a_k .

Suponga ahora que $x(\mathbb{N}) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto infinito en X , es decir, que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ toma un número infinito de valores distintos. Por hipótesis el conjunto $x(\mathbb{N})$ posee por lo menos un punto de acumulación $a \in X$. Existe pues $\alpha(1) \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_{\alpha(1)}, a) < 1.$$

Suponga elegidos naturales $\alpha(1), \dots, \alpha(j)$ tales que $\alpha(j-1) < \alpha(j)$ y

$$d(x_{\alpha(j)}, a) < \frac{1}{j}.$$

Puesto que la bola con centro a y radio $1/(j+1)$ contiene una infinidad de términos de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, existe $\alpha(j+1) \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha(j) < \alpha(j+1)$ y

$$d(x_{\alpha(j+1)}, a) < \frac{1}{j+1}.$$

Inductivamente se tiene definida una función $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que

$$(3.20) \quad d(x_{\alpha(n)}, a) < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La subsucesión $x \circ \alpha : \mathbb{N} \rightarrow X$ de $x : \mathbb{N} \rightarrow X$, es decir, la subsucesión $\{x_{\alpha(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, satisface

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{\alpha(n)}, a) = 0,$$

por (3.20), es decir, converge a a en X . ■

Como consecuencia inmediata de los Teoremas 3.22, 3.23 y 3.24 se obtiene el resultado siguiente que es válido para espacios métricos pero no para espacios topológicos generales.

3.25 Teorema. *En espacios métricos los conceptos de compacidad, compacidad secuencial y semicompacidad son equivalentes.*

Caracterización por completez y acotamiento total

Otra caracterización de la compacidad la proporcionan las propiedades de completez y acotamiento total. Esta caracterización generaliza, en particular, un resultado en $\mathbb{R}^n$ que asegura que un conjunto es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

3.32 Definición. Sea X un espacio métrico. La **función diámetro** $\text{Diam} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ se define como

$$\text{Diam}(A) = \sup_{a, b \in A} d(a, b), \quad \forall A \in \mathcal{P}(X).$$

Al elemento $\text{Diam}(A)$ de $\overline{\mathbb{R}}$ se le llama el **diámetro** del conjunto A en X .

Note que la función diámetro es creciente en el sentido de que $\forall A, B \in \mathcal{P}(X)$ tales que $A \subset B$, se cumple $\text{Diam}(A) \leq \text{Diam}(B)$.

3.33 Ejemplo. En un espacio métrico X , se tiene (Ejercicio) que $\forall x \in X$ y $\forall r > 0$,

$$\text{Diam}(B(x, r)) \leq \text{Diam}(B'(x, r)) \leq 2r. \quad \blacktriangleleft$$

3.34 Definición. Sea A un subconjunto de un espacio métrico X .

1. Se dice que A es un conjunto **acotado** si $\text{Diam}(A)$ es finito.
2. Se dice que A es **totalmente acotado** si $\forall \varepsilon > 0$ existe una cubierta finita de A por conjuntos cuyo diámetro es menor o igual a ε .

3.35 Ejemplo. En cualquier espacio métrico, la unión de cualquier familia finita de conjuntos acotados es un conjunto acotado (Ejercicio). En particular, todo conjunto totalmente

acotado es acotado. ◀

3.36 Ejemplo. La bola unitaria cerrada $B'(0, 1)$ del espacio de sucesiones $(\ell_1, \mathcal{N}_1)$ no es totalmente acotada.

En efecto, $\forall \nu \in \mathbb{N}$ defina $e_\nu = \{e_\nu(n)\}_{n=1}^\infty \in \ell_1$ como la sucesión

$$e_\nu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = \nu, \\ 0 & \text{si } n \neq \nu. \end{cases}$$

Se verifica de inmediato (Ejercicio) que el conjunto

$$\{e_\nu \mid \nu \in \mathbb{N}\}$$

está contenido en $B'(0, 1)$ y que

$$\mathcal{N}_1(e_\nu - e_\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} |e_\nu(n) - e_\mu(n)| = 2, \quad \forall \nu, \mu \in \mathbb{N}, \nu \neq \mu.$$

Considere un cubierta finita $\mathcal{C}$ de $B'(0, 1)$ por conjuntos arbitrarios. Necesariamente, existe al menos un elemento $C \in \mathcal{C}$ que contiene al menos dos puntos e_ν y e_μ con $\nu \neq \mu$. Entonces

$$\text{Diam}(C) \geq \mathcal{N}_1(e_\nu - e_\mu) = 2.$$

Esto prueba que ninguna familia finita de conjuntos cuyo diámetro sea menor o igual a uno puede ser cubierta de $B'(0, 1)$. Por lo tanto, el conjunto $B'(0, 1)$ no es totalmente acotado en ℓ_1 . ◀

Se tienen las caracterizaciones siguientes del acotamiento total para espacios métricos.

3.26 Proposición. Sea X un espacio métrico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- i. X es totalmente acotado.
- ii. Para cada $\varepsilon > 0$ existe una cubierta finita de X por bolas de radio ε .
- iii. Toda sucesión en X contiene una subsucesión de Cauchy.

Demostración. (ii) implica (i). Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis existe una cubierta finita $\mathcal{C}$ de X por bolas de radio $\varepsilon/2$. Ya que toda bola de radio $\varepsilon/2$ es un conjunto de diámetro menor o igual a ε (vea el Ejemplo 3.33), entonces $\mathcal{C}$ es una cubierta finita de X por conjuntos de diámetro menor o igual a ε . Por lo tanto, X es totalmente acotado.

(i) implica (iii). Sea $x : \mathbb{N} \rightarrow X$, $n \mapsto x(n) = x_n$, una sucesión arbitraria en X . Se definirá inductivamente una sucesión decreciente $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ de conjuntos en X tal que, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\text{Diam}(D_n) < \frac{1}{n}$$

y $x^{-1}(D_n)$ es un conjunto infinito en $\mathbb{N}$, es decir, D_n contiene una infinidad de términos de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty$.

Por hipótesis existe una cubierta finita $\mathcal{C}_n$ de X formada por conjuntos de diámetro menor o igual que $1/n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Como

$$\mathbb{N} = \bigcup_{A \in \mathcal{C}_1} x^{-1}(A)$$

y $\mathcal{C}_1$ es un conjunto finito, existe $A_1 \in \mathcal{C}_1$ tal que $x^{-1}(A_1)$ es un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, es decir, A_1 contiene una infinidad de términos de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ y $\text{Diam}(A_1) \leq 1$. Defina $D_1 = A_1$. Suponga definidos $D_1, \dots, D_j$ tales que $\text{Diam}(D_j) \leq 1/j$, $D_j \subset D_{j-1}$ y $x^{-1}(D_j)$ es un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, es decir, D_j contiene una infinidad de términos de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Puesto que

$$x^{-1}(D_j) = \bigcup_{A \in \mathcal{C}_{j+1}} [x^{-1}(D_j \cap A)]$$

es un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ y $\mathcal{C}_{j+1}$ es un conjunto finito, existe $A_{j+1} \in \mathcal{C}_{j+1}$ tal que $x^{-1}(D_j \cap A_{j+1})$ es un subconjunto infinito de $x^{-1}(D_j)$, es decir, $D_j \cap A_{j+1}$ contiene una infinidad de términos de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Defina $D_{j+1} = D_j \cap A_{j+1}$. Entonces $D_{j+1} \subset D_j$, $\text{Diam}(D_{j+1}) \leq 1/(j+1)$ y $x^{-1}(D_{j+1})$ es un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, es decir, D_{j+1} contiene una infinidad de términos de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Inductivamente se ha definido pues la anunciada sucesión de subconjuntos $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ de X .

Se afirma ahora que la sucesión $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty$ posee una subsucesión de Cauchy. Sea $\alpha(1) \in x^{-1}(D_1)$, es decir, $x_{\alpha(1)} \in D_1$. Suponga escogidos $\alpha(1), \dots, \alpha(j)$ tales que $\alpha(j-1) < \alpha(j)$ y $\alpha(j) \in x^{-1}(D_j)$, es decir, $x_{\alpha(j)} \in D_j$. Puesto que el subconjunto $x^{-1}(D_{j+1})$ es infinito, es decir, que D_{j+1} contiene una infinidad de términos de la sucesión $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty$, existe $\alpha(j+1) \in x^{-1}(D_{j+1})$, es decir, $x_{\alpha(j+1)} \in D_{j+1}$, tal que $\alpha(j+1) > \alpha(j)$. Inductivamente se

ha definido una función $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que

$$(3.21) \quad x_{\alpha(n)} \in D_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La subsucesión $x \circ \alpha : \mathbb{N} \rightarrow X$ de $x : \mathbb{N} \rightarrow X$, es decir, $\{x_{\alpha(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ de $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, es una sucesión de Cauchy. En efecto, ya que $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de conjuntos y se cumple (3.21), entonces

$$x_{\alpha(k)} \in D_n, \quad \forall k \geq n.$$

Así pues,

$$d(x_{\alpha(k)}, x_{\alpha(l)}) \leq \text{Diam}(D_n) \leq \frac{1}{n}, \quad \forall k, l \geq n \quad \text{y} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

De esto se sigue sin más que la subsucesión $\{x_{\alpha(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ de $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy.

(iii) implica (ii). Si no se cumple (ii), entonces no puede cumplirse (iii), por el Lema 3.20. ■

3.27 Proposición. *Todo espacio métrico compacto es totalmente acotado.*

Demostración. Si X es un espacio métrico compacto, entonces X es secuencialmente compacto (por el Teorema 3.25). El Lema 3.20 asegura entonces que $\forall \varepsilon > 0$ existe una cubierta finita de X por bolas de radio ε . La Proposición 3.26 implica entonces que X debe ser totalmente acotado. ■

3.28 Proposición. *Todo espacio métrico totalmente acotado es separable.*

Demostración. Si X es un espacio métrico totalmente acotado, entonces $\forall \varepsilon > 0$ existe una cubierta finita de X por bolas de radio ε , por la Proposición 3.26. La conclusión se sigue entonces del Lema 3.21. ■

3.29 Teorema. *Un espacio métrico es compacto si y sólo si es completo y totalmente acotado.*

Demostración. Suponga que X es compacto. La Proposición 3.27 implica que X es totalmente acotado. Por otra parte, el Teorema 3.25 implica que X debe ser secuencialmente compacto. Entonces X es completo, porque toda sucesión de Cauchy en X posee una sub-

sucesión convergente, pero la condición de Cauchy implica que la sucesión misma debe ser convergente (y al mismo límite que la subsucesión).

Suponga ahora que X es completo y totalmente acotado. Entonces toda sucesión en X posee una subsucesión de Cauchy (vea la Proposición 3.26), la cual debe ser convergente, por ser X completo. Esto prueba que X es secuencialmente compacto. El Teorema 3.25 implica entonces que X es compacto. ■

3.30 Corolario. *En espacios métricos, todo conjunto compacto es cerrado y acotado.*

Demostración. Sea A un conjunto compacto en un espacio métrico X . Entonces A debe ser un conjunto cerrado (vea el Corolario 3.18). Además, A es totalmente acotado, por el Teorema 3.29. Ya que todo conjunto totalmente acotado es un conjunto acotado (vea el Ejemplo 3.35), se concluye que A debe ser también un conjunto acotado. ■

La recíproca del corolario anterior es válida en $\mathbb{R}^n$ como se muestra en el resultado siguiente.

3.31 Corolario. *Un conjunto en $\mathbb{R}^n$ es totalmente acotado si y sólo si es acotado y es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

Demostración. Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, provisto de cualquiera de las normas $\mathcal{N}_p$, $1 \leq p \leq \infty$, por ejemplo, la norma $\mathcal{N}_\infty$. La necesidad se sigue del Corolario 3.30. Suponga entonces que S es un conjunto cerrado y acotado. Puesto que $\mathbb{R}^n$ es completo y S es un conjunto cerrado, entonces S debe ser un subespacio métrico completo. Resta pues probar que si S es acotado, entonces es totalmente acotado.

Como S es acotado existe un cubo cerrado C de arista $a > 0$ que contiene a S (recuerde que C es, de hecho, una bola cerrada con respecto a la norma $\mathcal{N}_\infty$). Subdividiendo cada arista de C en k partes iguales, C se puede escribir como unión de k^n cubos cerrados cada uno de arista de longitud a/k . Como el diámetro de un cubo con respecto a la norma $\mathcal{N}_\infty$ es la longitud de su arista, entonces dichos cubos forman una cubierta de S por conjuntos de diámetro a/k , $\forall k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, S es totalmente acotado. ■

3.37 Ejemplo. (El Cubo de Hilbert.) El cubo de Hilbert se define como el subespacio métrico Q de ℓ_2 dado por

$$Q = \left\{ x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2 \mid 0 \leq x(n) \leq \frac{1}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Se demostrará que Q es un conjunto compacto.

Se afirma pues que Q es un subespacio métrico completo de ℓ_2 . En efecto, como ℓ_2 es un espacio de Banach (vea el Ejemplo 3.9), basta probar que el conjunto Q es cerrado en ℓ_2 , por el Teorema 3.2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $\pi_n : \ell_2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\pi_n(x) = x(n), \quad \forall x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2,$$

es continua (de hecho, uniformemente continua), porque

$$|\pi_n(x) - \pi_n(y)| = |x(n) - y(n)| \leq \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x(k) - y(k)|^2 \right]^{1/2} = \mathcal{N}_2(x - y), \quad \forall x, y \in \ell_2.$$

Así pues, el conjunto

$$\pi_n^{-1} \left(\left[0, \frac{1}{2^n} \right] \right) = \left\{ x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2 \mid 0 \leq x(n) \leq \frac{1}{2^n} \right\}$$

es cerrado en ℓ_2 . Luego, el conjunto

$$Q = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_2 \mid 0 \leq x(n) \leq \frac{1}{2^n} \right\}$$

debe ser cerrado en ℓ_2 . Esto prueba la afirmación.

Es claro que Q es un conjunto acotado en ℓ_2 , pues

$$\mathcal{N}_2(x) = \left[\sum_{k=1}^{\infty} x^2(k) \right]^{1/2} \leq \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} \right]^{1/2} \leq \left[\frac{1}{3} \right]^{1/2}, \quad \forall x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in Q.$$

Se afirma ahora que Q es, de hecho, un conjunto totalmente acotado en ℓ_2 . En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $1/2^N < \varepsilon/2$. Para cada $x = (x(1), \dots, x(N), x(N+1), \dots) \in Q$, defina $x^* = (x(1), \dots, x(N), 0, 0, \dots)$ y escriba

$$Q^* = \{x^* \mid x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in Q\}.$$

Observe que Q^* es un conjunto acotado en ℓ_2 , pues Q es acotado, y

$$(3.22) \quad \mathcal{N}_2(x - x^*) = \left[\sum_{k=N+1}^{\infty} x^2(k) \right]^{1/2} \leq \left[\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{4^k} \right]^{1/2} \leq \left[\frac{1}{3 \cdot 4^N} \right]^{1/2} \leq \frac{1}{2^N} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in Q.$$

La aplicación

$$\pi(x(1), \dots, x(N), 0, 0, \dots) = (x(1), \dots, x(N)), \quad \forall x^* = (x(1), \dots, x(N), 0, 0, \dots),$$

del subespacio métrico Q^* de ℓ_2 en $(\mathbb{R}^N, \mathcal{N}_2)$ es claramente una isometría. Ya que toda isometría transforma conjuntos acotados sobre conjuntos acotados del mismo diámetro (Ejercicio), el conjunto $\pi(Q^*)$ debe ser acotado en $\mathbb{R}^N$. Puesto que en $\mathbb{R}^N$ todo conjunto acotado es totalmente acotado y que una isometría transforma conjuntos totalmente acotados sobre conjuntos totalmente acotados (Ejercicio), necesariamente $\pi(Q^*)$ es totalmente acotado en $\mathbb{R}^N$ y $Q^* = \pi^{-1}(\pi(Q^*))$ es totalmente acotado en ℓ_2 . Existe pues un número finito de bolas $\{B(a_1, \varepsilon/2), \dots, B(a_r, \varepsilon/2)\}$ tales que

$$(3.23) \quad Q^* \subset \bigcup_{k=1}^r B(a_k, \varepsilon/2).$$

Se sigue de (3.22) y (3.23) que

$$Q \subset \bigcup_{k=1}^r B(a_k, \varepsilon)$$

(¿Por qué?). Por lo tanto, Q es totalmente acotado. La conclusión se sigue pues del Teorema 3.29. ◀

3.38 Ejemplo. (El Conjunto de Cantor.) Para definir al conjunto de Cantor se construirá inductivamente una sucesión decreciente $\{E_\nu\}_{\nu=0}^\infty$ de conjuntos cerrados en $[0, 1]$.

Defina $E_0 = J_{0,1} = [0, 1]$. Entonces E_0 es medible y $m(E_0) = 1$. Restando a $J_{0,1}$ el intervalo abierto $I_{1,1}$ de longitud $1/3$ centrado en el punto medio de E_0 , se obtienen dos intervalos cerrados disjuntos $J_{1,1}$ y $J_{1,2}$, cada uno de longitud $1/3$. Defina $E_1 = J_{1,1} \cup J_{1,2}$. Entonces $E_1 \subset E_0$. Esto completa la primera etapa de la construcción.

Suponga que ya se ha completado la ν -ésima etapa de la construcción. Se tiene pues un conjunto E_ν , que es la unión de 2^ν intervalos cerrados disjuntos (numerados de izquierda

a derecha) $J_{\nu,1}, \dots, J_{\nu,2^\nu}$, cada uno de longitud $1/3^\nu$. Para $k = 1, \dots, 2^\nu$, a $J_{\nu,k}$ se le resta el intervalo abierto $I_{\nu+1,k}$ de longitud $1/3^{\nu+1}$ centrado en el punto medio de $J_{\nu,k}$, se obtienen $2^{\nu+1}$ intervalos cerrados disjuntos (numerados de izquierda a derecha) $J_{\nu+1,1}, \dots, J_{\nu+1,2^{\nu+1}}$ cada uno de longitud $1/3^{\nu+1}$. Defina

$$E_{\nu+1} = \bigcup_{k=1}^{2^{\nu+1}} J_{\nu+1,k}.$$

Entonces $E_{\nu+1} \subset E_\nu$. Note, por cierto, que el extremo izquierdo del intervalo $J_{\nu,k}$ es el extremo izquierdo de $J_{\nu+1,2k-1}$ y que el extremo derecho de $J_{\nu,k}$ es el extremo derecho de $J_{\nu+1,2k}$, $k = 1, \dots, 2^\nu$, por lo que dichos extremos nunca serán removidos. Esto termina el proceso inductivo.

Se define entonces el **Conjunto Ternario de Cantor** como

$$\mathcal{C} = \bigcap_{\nu=0}^{\infty} E_\nu.$$

Como el conjunto $\mathcal{C}$ es cerrado y acotado en $\mathbb{R}$, debe ser compacto.

Se afirma ahora que $\mathcal{C}$ es un conjunto infinito no numerable. En efecto, por lo que se hizo notar al final del penúltimo párrafo, los extremos de todos los intervalos $J_{\nu,k}$ deben pertenecer a $\mathcal{C}$. Ahora bien, siendo $\mathbb{R}$ completo y $\mathcal{C}$ cerrado en $\mathbb{R}$, si se prueba que $\mathcal{C}$ es un conjunto no vacío tal que todos sus puntos son puntos de acumulación, es decir, que $\mathcal{C}$ no tiene puntos aislados, entonces $\mathcal{C}$ debe ser un conjunto infinito no numerable, por una consecuencia del Teorema de Categoría de Baire (vea el Corolario 3.8). En efecto, $\mathcal{C}$ es no vacío porque los extremos de todo intervalo $J_{\nu,k}$ pertenecen a $\mathcal{C}$. Sea ahora $x \in \mathcal{C}$. Entonces $x \in E_\nu$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$. Luego, $\forall \nu \in \mathbb{N}$ existe $k(\nu) \in \{1, \dots, 2^\nu\}$ tal que $x \in J_{\nu,k(\nu)}$. Sea x_ν uno de los dos extremos de $J_{\nu,k(\nu)}$ tal que $x \neq x_\nu$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$. Puesto que

$$|x_\nu - x| \leq L(J_{\nu,k(\nu)}) = \frac{1}{3^\nu}, \quad \forall \nu \in \mathbb{N},$$

donde L denota “longitud”, entonces $\{x_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ es una sucesión en $\mathcal{C}$ de elementos distintos de x que converge a x , es decir, x es un punto de acumulación de $\mathcal{C}$. Esto prueba la afirmación.

Por otra parte, recuerde que todo punto $x \in [0, 1]$ admite una representación ternaria

de la forma

$$x = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{t_{\nu}}{3^{\nu}}, \quad t_{\nu} \in \{0, 1, 2\}, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Observe que los puntos de $[0, 1]$ que son removidos en la primera etapa de la construcción del conjunto de Cantor, es decir, los pertenecientes al intervalo $I_{1,1}$, son precisamente aquellos para los cuales $t_1 = 1$. Así mismo, $\forall \nu \in \mathbb{N}$, los puntos que son removidos de E_{ν} en la $\nu + 1$ -ésima etapa de la construcción, es decir, los pertenecientes a algún intervalo $I_{\nu+1,k}$, $k = 1, \dots, 2^{\nu}$, son aquellos para los cuales $t_{\nu+1} = 1$. Se concluye pues que los elementos del conjunto de Cantor son aquellos puntos de $[0, 1]$ tales que en su expansión ternaria no aparece ningún uno (exceptuando aquellos puntos que poseen dos representaciones ternarias distintas, o sea, de la forma $k/3^N$, donde k y N son enteros no negativos, es decir, aquellos puntos pertenecientes a Z_3 (vea la Observación 1.11). Por lo tanto,

$$\mathcal{C} = \left\{ x \in [0, 1] \left| x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k}{3^k}, t_k \in \{0, 2\}, \forall k \in \mathbb{N} \right. \right\}. \blacktriangleleft$$

Compacidad relativa

3.39 Definición. Un subconjunto A de un espacio métrico X se llama **relativamente compacto** si su adherencia $\overline{A}$ es un conjunto compacto en X .

3.32 Teorema. En un espacio métrico un conjunto es relativamente compacto si y sólo si está contenido en algún conjunto compacto.

Demostración. Sea A un subconjunto de un espacio métrico X . Si existe un conjunto compacto C en X tal que $A \subset C$, entonces

$$\overline{A} \subset \overline{C} = C,$$

donde la última igualdad se cumple por ser C un conjunto cerrado en X (vea el Corolario 3.30). Siendo $\overline{A}$ un conjunto cerrado en X contenido en C , A debe ser un conjunto cerrado en el subespacio métrico compacto C , luego $\overline{A}$ es un conjunto compacto, por la Proposición 3.19. Así pues, A es relativamente compacto.

Si ahora A es relativamente compacto en X , entonces A está contenido en el subconjunto compacto $\overline{A}$ de X . ■

Se sigue inmediatamente de la definición que si un conjunto es totalmente acotado, entonces cualquier subconjunto de él también es totalmente acotado (Ejercicio). De esta observación y del Teorema 3.32 se obtiene de inmediato el resultado siguiente (Ejercicio).

3.33 Proposición. *Todo conjunto relativamente compacto de un espacio métrico es totalmente acotado.*

En general la recíproca del resultado anterior no se cumple, por ejemplo, el conjunto $]0, 1/2[$ no es relativamente compacto en el subespacio métrico $]0, 1]$ (su cerradura relativa al subespacio $]0, 1]$ es $]0, 1/2]$, el cual no es un conjunto compacto, por no ser completo), pero sí es totalmente acotado. Sin embargo se tiene el resultado siguiente.

3.34 Teorema. *En un espacio métrico completo, un conjunto es relativamente compacto si y sólo si es totalmente acotado.*

Demostración. Sea A un conjunto en un espacio métrico X . Si A es relativamente compacto, la Proposición 3.33 implica que A es totalmente acotado.

Suponga ahora que A es totalmente acotado. Como X es completo y $\overline{A}$ es un subconjunto cerrado de X , entonces $\overline{A}$ es subespacio métrico completo de X (vea la Proposición 3.19). Para probar que $\overline{A}$ es un conjunto compacto resta probar que $\overline{A}$ es totalmente acotado (por el Teorema 3.29).

Sea pues $\varepsilon > 0$. Como A es totalmente acotado, existe una cubierta finita $\mathcal{C}$ de A por bolas cerradas de radio $\varepsilon/2$ (vea la Proposición 3.26). Ya que la unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado, $\mathcal{C}$ es automáticamente una cubierta de $\overline{A}$ por conjuntos de diámetro menor o igual a ε (vea el Ejemplo 3.33). Esto prueba que $\overline{A}$ es totalmente acotado.

■

Ya que todo conjunto totalmente acotado es acotado se deduce de inmediato el resultado siguiente.

3.35 Corolario. *Un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es relativamente compacto si y sólo si es acotado.*

Continuidad

3.36 Teorema. Sea f una función continua de un espacio métrico (X, d) en un espacio métrico (Y, ρ) . Si A es un conjunto compacto en X , entonces $f(A)$ es un conjunto compacto en Y .

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ una cubierta de $f(A)$ por abiertos de Y . Entonces

$$f^{-1}(\mathcal{C}) = \{f^{-1}(C) \mid C \in \mathcal{C}\},$$

es una cubierta de A por abiertos de X . Como A es compacto, existen $f^{-1}(G_1), \dots, f^{-1}(G_n)$ en $f^{-1}(\mathcal{C})$ que recubren a A (vea el Teorema 3.14). Luego, $\{G_1, \dots, G_n\}$ es una subfamilia finita de $\mathcal{C}$ que recubre a $f(A)$. Se sigue del Teorema 3.14 que $f(A)$ es compacto. ■

Ya que todo conjunto compacto es un conjunto cerrado, se tiene del teorema anterior el resultado siguiente (Ejercicio).

3.37 Corolario. Toda función continua de un espacio métrico compacto en otro espacio métrico es una aplicación cerrada.

3.38 Teorema. Si f es una función continua biyectiva de un espacio métrico compacto (X, d) sobre un espacio métrico (Y, ρ) , entonces f es un homeomorfismo.

Demostración. Esto es inmediato del Teorema 3.36 y del Corolario 3.37, ya que, en este caso, tanto f como f^{-1} son aplicaciones cerradas. ■

3.39 Teorema. Toda función continua de un espacio métrico compacto en $\mathbb{R}$ con la distancia usual, alcanza sus valores máximo y mínimo en puntos del compacto.

Demostración. Sea f una función continua de un espacio métrico compacto (X, d) en $\mathbb{R}$, con la distancia usual. Como $f(X)$ es un conjunto compacto en $\mathbb{R}$, por el Teorema 3.36, y todo conjunto compacto es cerrado y acotado, por el Corolario 3.30, existen en $\mathbb{R}$ el supremo y el ínfimo de $f(X)$, los cuales deben pertenecer a $f(X)$, es decir, que existen $a, b \in X$ tales que

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b), \quad \forall x \in X.$$

Luego, $f(a) = \min f(X)$ y $f(b) = \max f(X)$. ■

3.40 Teorema. (Teorema de Heine.) *Toda función continua de un espacio métrico compacto en un espacio métrico es uniformemente continua.*

Demostración. Sea f una función continua de un espacio métrico compacto (X, d) en un espacio métrico (Y, ρ) . La demostración se hará por reducción al absurdo. Suponga pues que f es continua pero no uniformemente continua. El lector puede verificar como ejercicio que existirían entonces un $\varepsilon_0 > 0$ y dos sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X tales que

$$(3.24) \quad d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

y

$$(3.25) \quad \rho(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Siendo X secuencialmente compacto, por el Teorema 3.25, existiría alguna subsucesión $\{x_{\alpha(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{\alpha(n)} = x,$$

para algún $x \in X$. Pero, por (3.24), se debería tener

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{\alpha(n)} = x.$$

Como f es continua en X , se seguiría del Teorema 2.34 que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{\alpha(n)}) = f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_{\alpha(n)}),$$

lo cual implicaría

$$(3.26) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f(x_{\alpha(n)}), f(y_{\alpha(n)})) = 0.$$

Esto sería absurdo porque (3.26) contradice (3.25). Por lo tanto, f debe ser uniformemente continua en X . ■

3.3. Espacios métricos conexos

La noción de conexidad se relaciona con la idea de que el espacio métrico en consideración es de una sola pieza (sin interrupciones) a lo largo de su recorrido.

Caracterizaciones

3.40 Definición. Se dice que un espacio métrico es **conexo** si ningún subconjunto propio no vacío de X es al mismo tiempo abierto y cerrado.

3.41 Definición. Una familia $\{A_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de un conjunto S se llama **partición** de S si satisface:

- i. $A_i \neq \emptyset, \quad \forall i \in I.$
- ii. $S = \bigcup_{i \in I} A_i.$
- iii. $A_i \cap A_j = \emptyset, \quad \forall i, j \in I, i \neq j.$

Puesto que la definición de conexidad está dada en términos negativos, para demostrar esta propiedad típicamente se procede negativamente, ya sea por reducción al absurdo o por negación.

3.41 Teorema. Sea X un espacio métrico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes a pares.

- i. X es conexo.
- ii. No existe una partición de X en dos conjuntos abiertos.
- iii. No existe una partición de X en dos conjuntos cerrados.

Demostración. La prueba de todas las implicaciones siguientes es por negación.

(i) implica (ii). Si $\{A, B\}$ es una partición de X en dos conjuntos abiertos, entonces $B = \complement A$. Puesto que $B \neq \emptyset$, entonces A es un subconjunto propio no vacío de X que es abierto y cerrado. Luego X no es conexo.

(ii) implica (iii). Si $\{C, D\}$ fuese una partición de X en dos conjuntos cerrados, entonces $D = \complement C$ y $C = \complement D$, luego ambos conjuntos serían abiertos. De donde, $\{C, D\}$ sería una partición de X en dos conjuntos abiertos.

(iii) implica (i). Si A es un subconjunto propio no vacío de X que es abierto y cerrado, entonces así mismo sería $\complement A$. En particular, $\{A, \complement A\}$ sería una partición de X en dos conjuntos cerrados. ■

3.42 Definición. Se dice que un subconjunto A de un espacio métrico X es un **conjunto**

conexo si el subespacio métrico A es un espacio métrico conexo, es decir, no existe una partición de A en dos abiertos de A .

Por convención, el conjunto vacío y todo subconjunto reducido a un punto serán considerados conjuntos conexos.

3.43 Observación. Una condición necesaria y suficiente (Ejercicio) para que un subconjunto A en un espacio métrico X sea un conjunto conexo es que no existan dos abiertos (o cerrados) U y V en X tales que

$$U \cap A, V \cap A \neq \emptyset, \quad (U \cap A) \cap (V \cap A) = \emptyset \quad \text{y} \quad (U \cap A) \cup (V \cap A) = A.$$

En particular, si X es un espacio métrico y $B \subset A \subset X$, entonces B es un conjunto conexo en X si y sólo si B es un conjunto conexo en el subespacio métrico A de X . ◁

3.44 Ejemplo. El lector puede verificar fácilmente (Ejercicio) que en $\mathbb{R}$ con la distancia usual, los subconjuntos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ y $[1, 2] \cup [3, 4]$, son todos conjuntos no conexos o desconexos, como también suele llamárseles. ◀

3.45 Ejemplo. En un espacio métrico discreto X los únicos conjuntos conexos son aquellos reducidos a un punto (recuerde que en un espacio discreto todo conjunto reducido a un punto es un conjunto abierto y cerrado). ◀

3.46 Ejemplo. En $\mathbb{R}$ con la distancia usual, los únicos conjuntos conexos son los intervalos (posiblemente reducidos a un punto o vacíos). En particular, $\mathbb{R}$ es conexo.

(a). Suponga que A es un conjunto conexo en $\mathbb{R}$, no es vacío y no reducido a un punto. Hay que probar que A es un intervalo no degenerado. Sean pues $x, y \in A$, $x < y$, y sea $z \in]x, y[$. Para probar que A es un intervalo se debe mostrar que $z \in A$. Suponga por el contrario que $z \notin A$. Entonces $\{]-\infty, z[\cap A,]z, \infty[\cap A \}$ sería una partición de A en dos conjuntos abiertos de A (ambos conjuntos son no vacíos, disjuntos y su unión es A), lo cual sería absurdo. Así pues, $z \in A$. Por lo tanto, A es un intervalo.

Sean $a = \inf A$ y $b = \sup A$ en $\overline{\mathbb{R}}$. Se afirma que A es un intervalo con extremos a y b . En efecto, sea $x \in]a, b[$. Por definición de supremo e ínfimo, existen $x', y' \in A$ tales que

$$a < x' < x < y' < y < b.$$

Por lo anterior, se tiene $]x', y'[\subset A$. Luego, $x \in A$. Esto prueba que $]a, b[\subset A$. Como clara-

mente $A \subset [a, b]$, se concluye que A es un intervalo de extremos a y b .

(b). Suponga ahora que I es un intervalo no degenerado de $\mathbb{R}$. Hay que probar que I es un conjunto conexo. Se procederá por reducción al absurdo. Suponga entonces que I no fuese conexo. Existiría pues una partición $\{B, C\}$ de I en dos conjuntos abiertos de I . Sean $x \in B$ y $y \in C$. Se puede suponer que $x < y$. Sea

$$c = \sup([x, y] \cap B).$$

Puesto que I es un intervalo, $c \in [x, y] \subset I$. Ya que $I = B \cup C$, necesariamente $c \in B$ o $c \in C$.

Suponga primero que $c \in B$. Entonces $c < y$ (por ser B y C disjuntos). Ya que B es un conjunto abierto en I , existe $0 < r < y - c$ tal que $B_I(c, r) \subset B$, luego,

$$[c, c + r[\subset B \cap I = B_I(c, r) \subset B,$$

además, por la elección de r ,

$$[c, c + r[\subset [x, y],$$

de donde

$$[c, c + r[\subset [x, y] \cap B.$$

Entonces, para

$$z \in]c, c + r[\subset [x, y] \cap B,$$

se tendría $z > c$. Esto sería absurdo porque c es cota superior de $[x, y] \cap B$. Se concluye pues que $c \notin B$.

Suponga ahora que $c \in C$. Entonces $x < c$ (por ser B y C disjuntos). Ya que C es un conjunto abierto en I , existe $0 < s < c - x$ tal que $B_I(c, s) \subset C$, luego,

$$]c - s, c] \subset C \cap I = B_I(c, s) \subset C,$$

además, por la elección de s ,

$$]c - s, c] \subset [x, y],$$

de donde

$$(3.27) \quad]c - s, c] \subset [x, y] \cap C.$$

Observe que

$$[x, y] \cap B \subset [x, c] \cap B = ([x, c - s] \cap B) \cup (]c - s, c] \cap B) = ([x, c - s] \cap B),$$

en particular, todos los elementos de $[x, y] \cap B$ serían menores o iguales que $c - s$, donde la primera contención se cumple porque c es el supremo de $[x, y] \cap B$ y última igualdad se cumple por (3.27) y por ser B y C disjuntos. Así pues, si $z \in]c - s, c]$, entonces z sería una cota superior de $[x, y] \cap B$ y $z < c$. Esto también sería absurdo porque c es la mínima de las cotas superiores de $[x, y] \cap B$.

En esta forma se llegaría a la conclusión de que $c \in I = B \cup C$ y $c \notin B \cup C = I$, lo cual sería absurdo. Por lo tanto, I debe ser un conjunto conexo. ◀

3.47 Ejemplo. Los únicos conjuntos conexos en el subespacio métrico $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$ con la distancia usual, son aquellos reducidos a un punto y el vacío (Ejercicio). ◀

3.48 Ejemplo. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}_p)$, $1 \leq p \leq \infty$, es conexo.

Se procederá por reducción al absurdo. Suponga entonces que $\mathbb{R}^n$ no fuese conexo. Existiría entonces una partición $\{A, B\}$ de $\mathbb{R}^n$ en dos conjuntos abiertos. Sean $x \in A$ y $y \in B$ y considere el segmento de recta

$$S = \{tx + (1 - t)y \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq t \leq 1\}.$$

Defina los subconjuntos de $[0, 1]$ siguientes,

$$A_1 = \{t \in [0, 1] \mid tx + (1 - t)y \in A\} \quad \text{y} \quad B_1 = \{t \in [0, 1] \mid tx + (1 - t)y \in B\}.$$

Se tendría entonces que $\{A_1, B_1\}$ sería una partición de $[0, 1]$. Se afirma que A_1 y B_1 son conjuntos abiertos en $[0, 1]$. En efecto, basta observar que la función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$f(t) = tx + (1 - t)y, \quad \forall t \in [0, 1],$$

es continua en $[0, 1]$ y que $A_1 = f^{-1}(A)$ y $B_1 = f^{-1}(B)$. Así pues, $\{A_1, B_1\}$ sería una partición de $[0, 1]$ en dos conjuntos abiertos de $[0, 1]$. Esto sería absurdo ya que, de acuerdo al Ejemplo 3.46, el intervalo $[0, 1]$ es un conjunto conexo en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, $\mathbb{R}^n$ es conexo. ◀

3.49 Ejemplo. En $(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}_p)$, $1 \leq p \leq \infty$, los únicos conjuntos que pueden ser simultáneamente abiertos y cerrados son $\mathbb{R}^n$ y $\emptyset$ ◀

Propiedades operacionales

3.42 Proposición. Sea D un subconjunto denso y conexo en un espacio métrico X , entonces X es conexo.

Demostración. La demostración es por negación. Suponiendo que X no es conexo, se debe probar que D tampoco es conexo. Por hipótesis existe una partición $\{M, N\}$ de X en dos conjuntos abiertos. Luego $M \cap D$ y $N \cap D$ son dos conjuntos abiertos no vacíos (por ser D denso) en el subespacio métrico D de X , cuya unión es D . Por lo tanto, D no es conexo. ■

3.43 Teorema. Si A es un conjunto conexo en un espacio métrico X y B es un subconjunto de X tal que

$$A \subset B \subset \overline{A},$$

entonces B es un conjunto conexo en X . En particular, si A es un conjunto conexo en X , entonces $\overline{A}$ es un conjunto conexo en X .

Demostración. Note que si $A \subset B \subset \overline{A}$, entonces A es un conjunto denso conexo en el subespacio métrico B de X , pues $(\overline{A})_B = \overline{A} \cap B = B$ (vea la parte (iii) del Teorema 2.28). La conclusión se sigue sin más de la Proposición 3.42. ■

3.44 Teorema. Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de conjuntos conexos en un espacio métrico X tal que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, $\forall i, j \in I$ con $i \neq j$, entonces el conjunto

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i$$

es conexo.

Demostración. Sean M y N dos conjuntos abiertos en el subespacio métrico A de X tales que $A = M \cup N$ y $M \cap N = \emptyset$. Para probar que A es conexo se debe probar que M o N es vacío.

Puesto que A_i es conexo,

$$A_i \cap M = \emptyset \quad \text{o} \quad A_i \cap N = \emptyset,$$

de otra forma $\{A_i \cap M, A_i \cap N\}$ sería una partición del subespacio métrico A_i de X en dos conjuntos abiertos, $\forall i \in I$. Luego, $A_i \subset M$ o $A_i \subset N$, $\forall i \in I$. Fije $i_0 \in I$. Suponga que $A_{i_0} \subset M$. Ya que $A_i \cap A_{i_0} \neq \emptyset$, necesariamente $A_i \cap M \neq \emptyset$, luego $A_i \cap N = \emptyset$, de donde, $A_i \subset M$, $\forall i \in I$. Se sigue que $A \subset M$, luego, $N = \emptyset$. Por lo tanto, A es conexo. ■

3.45 Corolario. Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos conexos en un espacio métrico X tales que $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

es un conjunto conexo.

La demostración se deja como ejercicio para el lector.

3.46 Teorema. (Teorema del paso de aduana.) Sean X un espacio métrico y A un subconjunto de X . Si B es un conjunto conexo en X tal que $A \cap B \neq \emptyset$ y $(\mathbb{C} A) \cap B \neq \emptyset$, entonces

$$(\text{Fr } A) \cap B \neq \emptyset.$$

Demostración. Se razona por reducción al absurdo. Suponga pues que $(\text{Fr } A) \cap B = \emptyset$, entonces $\{A^\circ \cap B, (\text{Ext } A) \cap B\}$ sería una partición del subespacio métrico B de X en dos conjuntos abiertos (vea la parte (iii) de la Proposición 2.21). Esto sería absurdo porque B es conexo. ■

3.47 Corolario. En un espacio métrico conexo, cualquier subconjunto propio no vacío tiene frontera no vacía.

Para la demostración, basta aplicar el Teorema 3.46 al subconjunto conexo X de X (Explique). Por otra parte, se puede verificar (Ejercicio) que la condición necesaria del Corolario 3.47 es también suficiente para que X sea conexo.

Continuidad

Un resultado básico relacionado con continuidad en espacios conexos es el siguiente.

3.48 Teorema. Si f es una función continua de un espacio métrico conexo (X, d) en un espacio métrico (Y, ρ) , entonces $f(X)$ es un conjunto conexo en Y , es decir, toda función

continua transforma conjuntos conexos sobre conjunto conexos.

Demostración. Sean M y N dos conjuntos abiertos en el subespacio métrico $f(X)$ de Y tales que $f(X) = M \cup N$ y $M \cap N = \emptyset$. Se debe probar que uno de los conjuntos M o N es vacío. Por hipótesis, $f^{-1}(M)$ y $f^{-1}(N)$ son conjuntos abiertos en X tales que $X = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$ y $f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N) = \emptyset$. Siendo X conexo, necesariamente uno de los conjuntos $f^{-1}(M)$ o $f^{-1}(N)$ es vacío. Si por ejemplo, $X = f^{-1}(M)$, entonces $M = f(f^{-1}(M)) = f(X)$, por ser $f : X \rightarrow f(X)$ suprayectiva, luego $N = \emptyset$. Por lo tanto, $f(X)$ es un conjunto conexo en Y . ■

3.50 Ejemplo. Considere el conjunto

$$D = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \right\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}\}$$

en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$. Se probará primero que D es conexo. Defina

$$A = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \right\} \quad \text{y} \quad B = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0 \right\}.$$

Se afirma que A y B son conjuntos conexos en $\mathbb{R}^2$. En efecto, defina las funciones $\varphi :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^2$ y $\psi :]-\infty, 0[\rightarrow \mathbb{R}^2$ como

$$\varphi(x) = \left(x, \sin \frac{1}{x} \right), \quad \forall x > 0, \quad \text{y} \quad \psi(x) = \left(x, \sin \frac{1}{x} \right), \quad \forall x < 0.$$

Claramente las funciones φ y ψ son continuas y satisfacen $A = \varphi(]0, \infty[)$ y $B = \psi(]-\infty, 0[)$.

Siendo $]0, \infty[$ y $]-\infty, 0[$ conexos en $\mathbb{R}$, se concluye que A y B son conexos, por el Teorema 3.48.

Sea

$$C = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}\}.$$

Puesto que

$$A \subset A \cup C \subset \overline{A} \quad \text{y} \quad B \subset B \cup C \subset \overline{B},$$

se sigue del Teorema 3.43 que ambos conjuntos $A \cup C$ y $B \cup C$ son conexos. Siendo $(A \cup C) \cap (B \cup C) \neq \emptyset$, el Teorema 3.44 implica que

$$(A \cup C) \cup (B \cup C) = D$$

debe ser un conjunto conexo. ◀

A continuación se discuten varias consecuencias del Teorema 3.48.

3.49 Corolario. (Teorema de valores intermedios.) Si f es una función continua de un espacio métrico conexo X en $\mathbb{R}$ con la distancia usual, entonces $f(X)$ es un intervalo en $\mathbb{R}$, es decir, si $f(x), f(y) \in f(X)$ con $f(x) < f(y)$ y $c \in \mathbb{R}$ es tal que $f(x) \leq c \leq f(y)$, entonces existe $z \in X$ tal que $f(z) = c$. En otras palabras, f no puede tomar dos valores distintos en $\mathbb{R}$ sin tomar todos los valores intermedios.

La demostración se sigue directamente (Ejercicio) del Teorema 3.48 y del Ejemplo 3.46.

3.50 Proposición. Un espacio métrico X es conexo si y sólo si toda aplicación continua de X en cualquier espacio métrico discreto Y es constante.

Demostración. Suponga primero que X es conexo. Si f es una función continua de X en Y , entonces $f(X)$ es un conjunto conexo en Y , por el Teorema 3.48. Pero por el Ejemplo 3.45, $f(X)$ es un conjunto reducido a un punto, es decir, existe $y \in Y$ tal que $f(X) = y$, o sea, $f(x) = y, \forall x \in X$, lo cual significa que f es constante de valor y .

Suponga ahora que X no es conexo. Sea $\{M, N\}$ una partición de X en dos conjuntos abiertos. Sea $Y = \{a, b\}$, con $a \neq b$, provisto de la métrica discreta y sea $f : X \rightarrow Y$ la función

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x \in M, \\ b & \text{si } x \in N. \end{cases}$$

Puesto que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\{a\}) = M$, $f^{-1}(\{b\}) = N$ y $f^{-1}(Y) = X$, se cumple que la imagen inversa de todos los conjuntos abiertos en Y son conjuntos abiertos en X , es decir, que f es continua y, claramente, f no es constante. Luego no se cumple la condición del enunciado. ■

Conexidad por arcos

3.51 Definición. Sea X un espacio métrico. Un **camino** en X es cualquier aplicación continua φ de algún intervalo $[\alpha, \beta]$ de $\mathbb{R}$ (con la distancia usual) en X . Al subconjunto $\varphi([\alpha, \beta])$ de X se le llama la **imagen del camino** φ . También se dice que un camino $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow X$

une a x con y en X si

$$\varphi(\alpha) = x \quad y \quad \varphi(\beta) = y \quad o \quad \varphi(\alpha) = y \quad y \quad \varphi(\beta) = x.$$

3.52 Definición. Se dice que un espacio métrico X es **conexo por arcos** si cualquier par de elementos de X puede ser unido por un camino en X .

3.51 Teorema. Todo espacio métrico conexo por arcos es conexo.

Demostración. Sea X un espacio métrico conexo por arcos. Fije $x_0 \in X$. Por hipótesis, $\forall x \in X$, existe un camino que une x con x_0 . Ya que la imagen de cualquier camino en X es un conjunto conexo (por el Ejemplo 3.46 y el Teorema 3.48) y X es la unión de los caminos que unen a x_0 con cualquier otro punto x de X , entonces X es unión de una familia conjuntos conexos que tienen a x_0 como elemento común. La conclusión se sigue sin más del Teorema 3.44. ■

La recíproca del Teorema 3.51 no es cierta, en general, como lo muestra el siguiente ejemplo.

3.53 Ejemplo. Considere el subespacio métrico del espacio normado $(\mathbb{R}^2, \mathcal{N}_\infty)$ dado por

$$D = A \cup B \cup C,$$

donde

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [-2, 2], \quad B = [0, 1] \times \{-2\} \quad y \quad C = \{(0, 0)\}$$

(Haga un bosquejo de D). Procediendo de manera similar al Ejemplo 3.50 se demuestra que A es un conjunto conexo en $\mathbb{R}^2$ (Ejercicio). Se probará que A no es conexo por arcos; más precisamente, que no existe ningún camino en D que una a $(0, 0)$ con algún otro punto de D .

Considere pues un camino arbitrario $\varphi : [0, 1] \rightarrow D$ tal que $\varphi(0) = (0, 0)$. Puesto que φ es continua y el conjunto $\{(0, 0)\}$ es cerrado en $\mathbb{R}^2$, el conjunto $\varphi^{-1}(\{(0, 0)\})$ es cerrado en el subespacio métrico $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$ (con la distancia usual). Se afirma que $\varphi^{-1}(\{(0, 0)\})$ es también un conjunto abierto en $[0, 1]$. En efecto, considere la bola abierta $B((0, 0), 1)$ en $\mathbb{R}^2$. Siendo φ continua, $\varphi^{-1}(B((0, 0), 1))$ es un conjunto abierto en el subespacio métrico $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$ el cual contiene a 0. Se verá que $\varphi^{-1}(B((0, 0), 1))$ está enteramente contenido en $\varphi^{-1}(\{(0, 0)\})$.

Por ser $\varphi^{-1}(B((0,0),1))$ abierto en $[0,1]$ que contiene a 0, existe $0 < \delta < 1$ tal que

$$[0, \delta[=] - \delta, \delta[\cap [0, 1] = B_{[0,1]}(0, \delta) \subset \varphi^{-1}(B((0,0),1)).$$

Otra vez, por ser φ continua, debe ser conexo el conjunto

$$\varphi([0, \delta]) \subset B((0,0),1) \cap D.$$

Suponga que $\varphi(t)$ llegara a tomar algún otro valor en D distinto de $(0,0)$ al variar t a lo largo de $[0, \delta]$, es decir, que existiera $(1/n_0, y_0) \in \varphi([0, \delta])$, donde $n_0 \in \mathbb{N}$ y $y_0 \in [-1, 1]$ (note que $B((0,0),1) \cap B = \emptyset$). Entonces al fijar $0 < x_0 < 1/n_0$ tal que $x_0 \neq 1/n, \forall n \in \mathbb{N}$, y al considerar los conjuntos abiertos disjuntos en $\mathbb{R}^2$ dados por

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < x_0\} \quad \text{y} \quad H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > x_0\},$$

se tendría

$$(0,0) \in G \cap \varphi([0, \delta]) \subset G \cap B((0,0),1) \cap D$$

$$\text{y} \quad (1/n_0, y_0) \in H \cap \varphi([0, \delta]) \subset H \cap B((0,0),1) \cap D.$$

Luego $G \cap \varphi([0, \delta])$ y $H \cap \varphi([0, \delta])$ serían dos conjuntos abiertos disjuntos no vacíos en $\varphi([0, \delta])$ tales que

$$\varphi([0, \delta]) = [G \cap \varphi([0, \delta])] \cup [H \cap \varphi([0, \delta])],$$

donde esto último se cumpliría porque

$$D \cap B((0,0),1) = \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [-1, 1] \right) \cup \{(0,0)\},$$

pues $B((0,0),1) \cap B = \emptyset$, lo cual sería absurdo porque $\varphi([0, \delta])$ es conexo. Así pues no puede existir ningún otro punto de D distinto de $(0,0)$ en $\varphi([0, \delta])$, es decir, $\varphi([0, \delta]) = \{(0,0)\}$, o sea,

$$[0, \delta[=] - \delta, \delta[\cap [0, 1] = B_{[0,1]}(0, \delta) \subset \varphi^{-1}(\{(0,0)\}).$$

Esto prueba que el conjunto $\varphi^{-1}(\{(0,0)\})$ es abierto en $[0, 1]$. Siendo el conjunto $\varphi^{-1}(\{(0,0)\})$ abierto, cerrado y no vacío en el espacio conexo $[0, 1]$, se concluye que $\varphi^{-1}(\{(0,0)\}) = [0, 1]$. Por lo tanto, cualquier función continua de $\varphi : [0, 1] \rightarrow D$ tal que $\varphi(0) = (0,0)$ debe cumplir que $\varphi(t) = (0,0), \forall t \in [0, 1]$. Esto prueba que no existe ningún camino en D que una a $(0,0)$

con algún otro punto de D , es decir, que D no es conexo por arcos. ◀

3.54 Ejemplo. Se verifica de inmediato (Ejercicio) que los conjuntos A y B del Ejemplo 3.50 son conexos por arcos, luego conexos, pero que el conjunto D no es conexo por arcos. Para ver esto último, se podría seguir una idea similar a la del ejemplo anterior (Ejercicio). ◀

Ejercicios

3.1. Demuestre que toda sucesión convergente en un espacio métrico arbitrario es de Cauchy. **Proporcione** un ejemplo donde el recíproco no sea cierto. **Pruebe** también que toda sucesión de Cauchy es acotada. **Muestre** finalmente que una sucesión de Cauchy es convergente si y sólo si alguna de sus subsucesiones es convergente y, en este caso, la sucesión converge al mismo límite que la subsucesión.

3.2. Muestre que toda función uniformemente continua f de un espacio métrico (X, d) en otro espacio métrico (Y, ρ) transforma sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy. **Pruebe** además que si f es un homeomorfismo de X sobre Y tal que f y su inversa f^{-1} son funciones uniformemente continuas, entonces X es completo si y sólo si Y es completo.

3.3. Considere dos espacios métricos (X, d) (Y, ρ) y una función continua $f : X \rightarrow Y$. Defina la función $D : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$D(x, x') = d(x, x') + \rho(f(x), f(x')), \quad \forall x, x' \in X.$$

Si X es completo, **pruebe** que (X, D) es también completo.

3.4. Considere un conjunto X provisto con una métrica d que satisfaga la desigualdad ultramétrica. **Pruebe** que una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X es de Cauchy si y sólo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0.$$

3.5. Muestre que $(\ell_{\infty}, \mathcal{N}_{\infty})$ es un espacio de Banach.

3.6. En el Teorema de bolas unidas, **demuestre** que el conjunto $\bigcap_{n=1}^{\infty} B'(x_n, r_n)$ consta de un sólo punto.

3.7. Pruebe que $\mathbb{R}$ provisto de la métrica

$$d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

no es completo.

3.8. Considere la sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ del espacio métrico completo (X, d) tal que la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} d(s_n, s_{n+1})$$

es convergente. **Muestre** que la sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ debe converger a un elemento s de X y que

$$d(s_n, s) \leq \sum_{i=n}^{+\infty} d(s_i, s_{i+1}), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En un espacio métrico (X, d) se define la función $\text{Diam} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ como

$$\text{Diam } A = \sup_{a, b \in A} d(a, b), \quad \forall A \in \mathcal{P}(X).$$

A $\text{Diam } A$ se le llama el **diámetro** del subconjunto A de X .

3.9. Demuestre que un espacio métrico (X, d) es completo si y sólo si toda sucesión decreciente $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos cerrados en X tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Diam } A_n = 0$$

en $\overline{\mathbb{R}}$, tiene intersección no vacía. **Además**, el conjunto intersección

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

debe constar de un sólo punto.

3.10. Considere el espacio métrico completo (X, d) . **Pruebe** que en toda familia a lo sumo numerable de conjuntos cerrados cuya unión sea X , alguno debe tener interior no vacío.

3.11. Considere el espacio métrico completo (X, d) . **Muestre** las afirmaciones siguientes.

i. La intersección de toda familia a lo sumo numerable de conjuntos abiertos densos en X , es un conjunto denso en X .

Sugerencia. Intente aplicar el Teorema de las bolas anidadas.

ii. La unión de toda familia a lo sumo numerable de conjuntos cerrados con interior vacío en X , es un conjunto con interior vacío.

Deduzca de lo anterior que X no es puede ser escrito como la unión de ninguna familia a lo sumo numerable de conjuntos densos en ninguna parte.

3.12. Pruebe que en todo espacio métrico sin puntos aislados existe por lo menos una familia de subconjuntos abiertos densos cuya intersección es el vacío.

3.13. Proporcione un ejemplo de una función contractante de un espacio métrico en sí mismo que no tenga puntos fijos.

3.14. En el espacio métrico completo $\mathbb{R}$, provisto de la distancia usual, considere la función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$F(x) = \begin{cases} x + e^{-x} & \text{si } x \geq 0, \\ \frac{1}{2}x + 1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

lo siguiente.

i. Muestre que, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ con $x \neq y$, se cumple $|F(x) - F(y)| < |x - y|$.

ii. Verifique que F no tiene puntos fijos.

3.15. Demuestre el Corolario 3.10. Aplique este resultado para probar que la ecuación

$$\frac{1 - x^2}{1 + x^2} + \frac{4x^3}{3} - 9x = 0$$

tiene una única solución en el intervalo $[0, 1]$ e **indique** un proceso iterativo para determinarla.

3.16. Admita que el espacio normado $(\mathcal{C}([0, 1]), \mathcal{N}_\infty)$ de todas funciones continuas de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$ con la norma uniforme, es de Banach. Considere la función $F : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1])$ que a cada función continua $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ le asocia la función continua $F(x) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$F(x)(t) = t^2 \tan t + \int_0^t \frac{\sin u}{2} x(u) du, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Pruebe que F es una función contractante. **Deduzca** que la ecuación integral

$$x(t) = t^2 \tan t + \int_0^t \frac{\sin u}{2} x(u) du, \quad \forall t \in [0, 1],$$

tiene una solución única en $\mathcal{C}([0, 1])$, es decir, que existe una única función continua $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$h(t) = t^2 \tan t + \int_0^t \frac{\sin u}{2} h(u) du, \quad \forall t \in [0, 1].$$

(De hecho, la función $t \mapsto t^2 \tan t$ anterior puede ser reemplazada por cualquier función continua g de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$ sin alterar el resultado.)

Recuerde que un espacio métrico (X, d) se dice que es **acotado** si $\text{Diam } X < +\infty$.

3.17. Considere un espacio métrico separable acotado (X, d) y un subconjunto denso $\{s_n | n \in \mathbb{N}\}$ de X . Para todo elemento s de X , se define x_s como la sucesión $\{d(s, s_n)\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{R}$. Se demostró anteriormente que la aplicación $s \mapsto x_s$ es una isometría de X sobre un subespacio de ℓ_{∞} . ¿Cuál subespacio de ℓ_{∞} podría ser una completación de X ? (Justifique).

3.18. Proporcione un ejemplo de dos conjuntos que no sean compactos pero cuya unión e intersección sí sean compactos.

3.19. Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de conjuntos cerrados no vacíos en un espacio compacto, **muestre** que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset.$$

3.20. Pruebe que un subconjunto A de un espacio métrico (X, d) es totalmente acotado si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto finito F de X tal que $d(x, F) < \varepsilon$, para todo $x \in A$.

3.21. Considere un espacio métrico (X, d) , un subconjunto compacto K de X y un subconjunto cerrado F de X . **Demuestre** que $F \cap K = \emptyset$ si y sólo si $d(F, K) > 0$ (es decir, si y sólo si existe $\delta > 0$ tal que $d(x, y) > \delta$ para toda $x \in F$, $y \in K$)

Sugerencia. La función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = d(x, F)$, $\forall x \in K$, es continua (¿Por qué?).

3.22. Considere un espacio métrico (X, d) , un conjunto compacto K y un subconjunto A de X . **Pruebe** que $\overline{A} \cap K \neq \emptyset$ si y sólo si $d(A, K) = 0$.

3.23. (Propiedad de Lebesgue.) Si X es un espacio métrico compacto y $\{\mathcal{G}_i\}_{i \in I}$ es un recubrimiento abierto de X , **pruebe** que existe un número $\alpha > 0$ tal que toda bola abierta de radio α está contenida por lo menos en alguno de los $\mathcal{G}_i$. Además, **proporcione** un ejemplo de un espacio totalmente acotado en el cual el resultado anterior deja de ser cierto.

Sugerencia. Para toda $x \in X$ existe $r_x > 0$ tal que la bola $B(x, 2r_x)$ está contenida en algún $\mathcal{G}_i$. Récubrase X por un número finito de bolas $B(x, r_x)$ y pruebe que el menor r_x de los radios correspondientes tiene la propiedad requerida.

3.24. Considere la completación (E^*, d^*) de un espacio métrico (E, d) . **Demuestre** que (E, d) es totalmente acotado si y sólo si (E^*, d^*) es compacto.

3.25. Verifique que el conjunto ternario de Cantor puede ser escrito alternativamente en la forma

$$\mathcal{C} = \left\{ x \in [0, 1] \mid x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}, x_n \in \{0, 2\}, \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Usando esta representación de $\mathcal{C}$, **pruebe** que $\mathcal{C}$ es equipotente a $[0, 1]$.

3.26. Si X es un espacio métrico compacto y Y es otro espacio métrico, **muestre** que toda función continua $f : X \rightarrow Y$ es acotada (es decir, que el subconjunto $f(X)$ de Y es acotado). En el caso de que $Y = \mathbb{R}$, **pruebe** que existe $a, b \in X$ tales que

$$f(a) = \inf_{x \in X} f(x) \quad \text{y} \quad f(b) = \sup_{x \in X} f(x).$$

3.27. **Demuestre** que toda función uniformemente continua de un espacio métrico en otro espacio métrico, manda conjuntos totalmente acotados sobre conjuntos totalmente acotados.

3.28. Si f es una biyección continua de un espacio métrico compacto sobre otro espacio métrico, **pruebe** que ambos espacios son uniformemente homeomórficos bajo f .

3.29. En un espacio métrico que tal que toda bola cerrada es un conjunto compacto, **muestre** que todo conjunto acotado es relativamente compacto.

3.30. Si (E, d) es un espacio métrico compacto y $f : E \rightarrow E$ es una función tal que

$$d(f(x), f(y)) \geq d(x, y), \quad \forall x, y \in E,$$

demuestre que f es una isometría de E sobre E .

Sugerencia. Fije dos puntos a, b en E . Defina $f_n = f \circ f_{n-1}$ y $a_n = f_n(a)$, $b_n = f_n(b)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Muestre que para toda $\varepsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $d(a, a_k) \leq \varepsilon$ y $d(b, b_k) \leq \varepsilon$, y concluya que $f(E)$ es denso en E y que $d(f(a), f(b)) = d(a, b)$.

3.31. Se dice que un espacio métrico X es **localmente compacto** si todo punto $x \in X$ tiene una vecindad que es un conjunto compacto en X .

i. Muestre que todo espacio compacto es localmente compacto pero que no todo espacio localmente compacto es compacto.

ii. En un espacio métrico localmente compacto, **demuestre** que todo subconjunto abierto y todo subconjunto cerrado son subespacios localmente compactos.

iii. **Proporcione** un ejemplo de un espacio métrico localmente compacto que no sea completo.

3.32. Considere un espacio métrico X para el que existe un número $r > 0$ tal que toda bola cerrada $B'(x, r)$ es un compacto. **Pruebe** que X es completo. **Muestre**, además, que si A es un subconjunto relativamente compacto de X , entonces el conjunto

$$V'_{r/2} = \left\{ x \in X \mid d(x, A) \leq \frac{r}{2} \right\}$$

es compacto.

3.33. Considere un espacio métrico conexo X . Si existe alguna función continua no constante de X en $\mathbb{R}$, **pruebe** que $\text{Card } X > \aleph_0$.

3.34. Considere dos espacios métricos X, Y y una función continua f de un subconjunto conexo A de X en Y . Si para cada $x \in A$ existe una vecindad V de x en X tal que $f|_{V \cap A}$ es constante, **demuestre** que f es constante en A .

3.35. Proporcione un ejemplo de un conjunto conexo cuyo interior no sea conexo.

3.36. Sean A, B dos subconjuntos no vacíos de un espacio métrico X . Si A, B son conjuntos cerrados y $A \cup B, A \cap B$ son conexos en X , **muestre** que A y B son conexos. **Proporcione** un ejemplo en $\mathbb{R}$ que ilustre que la hipótesis de ser A, B cerrados no puede suprimirse.

3.37. Si A, B son conexos en un espacio métrico X y $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$, **pruebe** que $A \cup B$ es conexo.

3.38. Muestre que un espacio métrico X no es conexo si y sólo si existen dos conjuntos A, B no vacíos tales que $X = A \cup B$ y $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$.

3.39. Si X es un espacio métrico conexo provisto de una métrica no acotada, **pruebe** que toda esfera en X es no vacía.

3.40. Si X es un espacio métrico compacto tal que la adherencia de toda bola abierta $B(a, r)$ es la bola cerrada correspondiente $B'(a, r)$, **demuestre** que toda bola abierta $B(a, r)$ es conexa.

Sugerencia. Suponga que $B(a, r) = A \cup B$, donde A, B son no vacíos, abiertos en $B(a, r)$ y $A \cap B = \emptyset$. Si $a \in A$, considere un punto $x \in B$ tal que $d(a, x) = \inf_{b \in B} d(a, b)$ (Justifique).

3.41. Sea X el subespacio compacto de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{N}_\infty)$ definido como

$$\{(x_1, x_2) \mid x_1 = 0 \text{ y } 0 \leq x_2 \leq 1 \text{ ó } 0 \leq x_1 \leq 1 \text{ y } x_2 = 0\}.$$

Pruebe que en X cada bola abierta es conexa, pero que la adherencia de cierta bola abierta no es la bola cerrada correspondiente.

3.42. Muestre que toda bola en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}_p)$, $1 \leq p \leq \infty$, es un conjunto conexo.

3.43. Demuestre que si G es un conjunto abierto conexo en el espacio normado $(\mathbb{R}^2, \mathcal{N}_2)$, entonces G es conexo por arcos.

Sugerencia. Fije $x_0 \in G$. Considere los conjuntos

$$H = \{x \in G \mid x \text{ y } x_0 \text{ se pueden unir por algún camino en } G\},$$

$$J = \{x \in G \mid x \text{ y } x_0 \text{ no se pueden unir por ningún camino en } G\}.$$

Pruebe que $J = \emptyset$.

3.44. Sea

$$A = \left\{ \left(x, \frac{x}{n} \right) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \times \{0\},$$

donde $\mathbb{R}^2$ está provisto de la distancia euclidiana. **Pruebe** que A es conexo.

3.45. Sea E un espacio normado y sean $x, y \in E$. Se llama **segmento de extremos** x y y al conjunto

$$[x, y] = \{(1-t)x + ty \in E \mid 0 \leq t \leq 1\} = \{x + t(y-x) \in E \mid 0 \leq t \leq 1\}.$$

Sea A un subconjunto de E . Se dice que A es un **conjunto convexo** si $[x, y] \subset A$, $\forall x, y \in A$.

Demuestre las afirmaciones siguientes.

i. Si A es un conjunto convexo, entonces A es conexo por arcos. **Proporcione** un ejemplo que muestre que la recíproca no siempre se cumple.

ii. Suponga que E tiene dimensión mayor que 1. ¿Es el conjunto $A = B(0, r) \setminus \{0\}$, con $r > 0$, convexo, conexo por arcos, conexo? ¿Y si E tiene dimensión 1? **Justifique.**

3.46. Muestre que si $f : [0, 2] \rightarrow [0, 2]$ es una función continua, donde $[0, 2]$ está provisto de la distancia usual en $\mathbb{R}$, entonces f posee al menos un punto fijo en $[0, 2]$, es decir,

existe $a \in [0, 2]$ tal que $f(a) = a$.

3.47. Sea G un conjunto abierto no vacío en $\mathbb{R}$. **Demuestre** que G se puede escribir como unión a lo sumo numerable de intervalos abiertos *disjuntos*.

Sugerencia. Para cada $x \in G$, considere la unión I_x de todos los intervalos abiertos que contienen a x y que están contenidos en G .

3.48. Sean X y Y dos espacios métricos y sean $A \subset X$ y $B \subset Y$. **Pruebe** que $A \times B$ es un conjunto conexo en el espacio métrico producto $X \times Y$ si y sólo si A y B son conjuntos conexos en X y Y , respectivamente.

Sugerencia. Use funciones continuas y el Teorema 3.44.

3.49. Los ejercicios y preguntas que aparecen a lo largo del capítulo.

Capítulo 4. Espacios normados

Un gran número de espacios métricos y topológicos de interés y utilidad en Análisis Real (y en otras áreas de estudio) son en realidad espacios normados y sus correspondientes subespacios métricos y normados, por ejemplo, los espacios euclidianos, los espacios de sucesiones y los espacios de funciones. En este capítulo se hace un estudio introductorio al amplio tema de los espacios normados. Aparte de las propiedades generales que heredan los espacios normados de los espacio métricos (vistas en los capítulos anteriores), se presentarán algunos resultados propios de estos espacios relacionados con subespacios normados y subespacios métricos, transformaciones lineales continuas, espacios de transformaciones lineales continuas, espacios de dimensión finita y espacios de Banach.

4.1. Conceptos básicos

Anteriormente se definió un **espacio normado** (vea la Definición 2.9) como una pareja $(E, \mathcal{N})$ donde E es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$ y $\mathcal{N}$ es una función de E en $\mathbb{R}$ con las propiedades siguientes.

- i. $\mathcal{N}(x) \geq 0, \forall x \in E$.
- ii. $\mathcal{N}(\lambda x) = |\lambda| \mathcal{N}(x), \forall x \in E$ y $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
- iii. $\mathcal{N}(x + y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y), \forall x, y \in E$.
- iv. $\mathcal{N}(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$.

En un espacio normado $(E, \mathcal{N})$ se cumplen las desigualdades siguientes (vea la Proposición 2.3):

$$(4.1) \quad |\mathcal{N}(x) - \mathcal{N}(y)| \leq \mathcal{N}(x - y) \quad \text{y} \quad |\mathcal{N}(x) - \mathcal{N}(y)| \leq \mathcal{N}(x + y), \quad \forall x, y \in E.$$

La **métrica inducida por la norma** fue definida como la función $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d(x, y) = \mathcal{N}(x - y), \quad \forall x, y \in E.$$

Todos los conceptos y resultados sobre espacios métricos se aplican pues a espacios normados al proveer a éstos de esta métrica.

Algunos conceptos relacionados con una métrica se comportan de manera más natural

en el contexto de espacios normados, como lo muestra el resultado siguiente.

4.1 Proposición. *En un espacio normado E , si A es una bola con centro en a y radio $r > 0$ (abierta o cerrada), entonces se cumplen las afirmaciones siguientes.*

- i. A° es la bola abierta correspondiente.
- ii. $\overline{A}$ es la bola cerrada correspondiente.
- iii. $\text{Fr } A$ es la bola esfera correspondiente.
- iv. $\text{Ext } A$ es el complemento de la bola cerrada correspondiente.

Demostración. Sólo se probará (ii) para el caso $A = B(a, r)$, el resto se deja como ejercicio para el lector.

Como $B'(a, r)$ es un conjunto cerrado que contiene a A , entonces

$$\overline{B(a, r)} \subset B'(a, r).$$

Fijando $x \in B'(a, r)$ se mostrará que $x \in \overline{B(a, r)}$. Si $\mathcal{N}(x - a) < r$, entonces $x \in B(a, r) \subset \overline{B(a, r)}$. Suponga entonces que $\mathcal{N}(x - a) = r$. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Se afirma que el punto

$$y = x - \frac{\varepsilon/2}{\mathcal{N}(x - a)}(x - a) = a + \left(1 - \frac{\varepsilon/2}{\mathcal{N}(x - a)}\right)(x - a)$$

pertenece a $B(x, \varepsilon) \cap B(a, r)$ (Haga un dibujo). En efecto, se tiene

$$\mathcal{N}(y - x) = \mathcal{N}\left(\frac{\varepsilon/2}{\mathcal{N}(x - a)}(x - a)\right) = \frac{\varepsilon/2}{\mathcal{N}(x - a)}\mathcal{N}(x - a) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

y

$$\mathcal{N}(y - a) = \mathcal{N}\left[\left(1 - \frac{\varepsilon/2}{\mathcal{N}(x - a)}\right)(x - a)\right] = \left(1 - \frac{\varepsilon/2}{\mathcal{N}(x - a)}\right)\mathcal{N}(x - a) = r - \frac{\varepsilon}{2} < r.$$

Esto prueba la afirmación. Por lo tanto,

$$B'(a, r) \subset \overline{B(a, r)}. \blacksquare$$

Un espacio vectorial topológico es un espacio que es a la vez vectorial y topológico donde las operaciones de adición y multiplicación por escalares son continuas. A continuación se probará que todo espacio normado es un espacio vectorial topológico.

4.1 Definición. *Sea $\{(E_1, \mathcal{N}_1), \dots, (E_n, \mathcal{N}_n)\}$ una familia finita de espacios normados sobre el campo $\mathbb{R}$. Considere el producto cartesiano*

$$E = E_1 \times \dots \times E_n.$$

Se definen la suma y el producto por escalares en E del modo usual, es decir,

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \quad y \quad \lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n),$$

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in E \quad y \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Se sabe que E provisto con estas operaciones es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$ conocido como **producto algebraico** o **suma directa** de los espacios vectoriales $E_1, \dots, E_n$.

Se verifica de inmediato (Ejercicio) que la función $\mathcal{N} : E \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\mathcal{N}(x) = \max\{\mathcal{N}_1(x_1), \dots, \mathcal{N}_n(x_n)\}, \quad \forall x \in E,$$

es una norma sobre E . Al par $(E, \mathcal{N})$ se le llama **espacio normado producto** de los espacios $\{(E_k, \mathcal{N}_k), k = 1, \dots, n\}$.

Las funciones $\pi_k : E \rightarrow E_k$ definidas como

$$\pi_k((x_1, \dots, x_n)) = x_k, \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in E,$$

para $k = 1, \dots, n$, se llaman las **proyecciones naturales o canónicas** del espacio normado producto E .

4.2 Proposición. Las proyecciones naturales $\pi_k : E \rightarrow E_k$ son funciones uniformemente continuas del espacio normado producto E en E_k , $k = 1, \dots, n$.

La demostración se sigue directamente de la desigualdad

$$\mathcal{N}_k(\pi_k(x) - \pi_k(y)) = \mathcal{N}_k(x_k - y_k) \leq \mathcal{N}(x - y), \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in E.$$

4.3 Proposición. Sea $(E, \mathcal{N})$ un espacio normado. Se cumplen las afirmaciones siguientes.

i. La adición en E , es decir, la función

$$(x, y) \mapsto x + y$$

del espacio normado producto $E \times E$ en E es uniformemente continua en $E \times E$.

ii. El producto por escalares en E , es decir, la función

$$(\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

del espacio normado producto $\mathbb{R} \times E$ en E es continua en $\mathbb{R} \times E$.

iii. La norma de E , es decir, la función

$$x \mapsto \mathcal{N}(x)$$

de E en $\mathbb{R}$ es uniformemente continua en E .

Demostración. (i). La adición es uniformemente continua en $E \times E$ porque

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_E([u+v] - [x+y]) &\leq \mathcal{N}_E(u-x) + \mathcal{N}_E(v-y) \leq 2 \max\{\mathcal{N}_E(u-x), \mathcal{N}_E(v-y)\} \\ &= 2\mathcal{N}_{E \times E}(u-x, v-y) = 2\mathcal{N}_{E \times E}((u, v) - (x, y)), \quad \forall (u, v), (x, y) \in E \times E. \end{aligned}$$

(ii). Fije $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{R} \times E$. Se probará que el producto por escalares es continua en (λ_0, x_0) . Se cumple, $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E$, que

$$\begin{aligned} (4.2) \quad \mathcal{N}(\lambda x - \lambda_0 x_0) &= \mathcal{N}(\lambda x - \lambda x_0 + \lambda x_0 - \lambda_0 x_0) \\ &\leq \mathcal{N}(\lambda(x - x_0)) + \mathcal{N}((\lambda - \lambda_0)x_0) \\ &\leq |\lambda|\mathcal{N}(x - x_0) + |\lambda - \lambda_0|\mathcal{N}(x_0). \end{aligned}$$

Suponga primero que

$$(4.3) \quad \mathcal{N}_{\mathbb{R} \times E}((\lambda, x) - (\lambda_0, x_0)) \leq 1.$$

Entonces $|\lambda - \lambda_0| \leq 1$, de donde, $|\lambda| \leq 1 + |\lambda_0|$. Así pues, (4.3) implica, por (4.2), que

$$(4.4) \quad \mathcal{N}(\lambda x - \lambda_0 x_0) \leq [1 + |\lambda_0|]\mathcal{N}(x - x_0) + |\lambda - \lambda_0|\mathcal{N}(x_0),$$

Sea $\varepsilon > 0$. Suponga adicionalmente a (4.3) que

$$(4.5) \quad \mathcal{N}_{\mathbb{R} \times E}((\lambda, x) - (\lambda_0, x_0)) \leq \frac{\varepsilon}{1 + |\lambda_0| + \mathcal{N}(x_0)}.$$

Entonces

$$|\lambda - \lambda_0| \leq \frac{\varepsilon}{1 + |\lambda_0| + \mathcal{N}(x_0)} \quad \text{y} \quad \mathcal{N}(x - x_0) \leq \frac{\varepsilon}{1 + |\lambda_0| + \mathcal{N}(x_0)}.$$

Luego, (4.5) implica

$$(4.6) \quad [1 + |\lambda_0|]\mathcal{N}(x - x_0) + |\lambda - \lambda_0|\mathcal{N}(x_0) \leq [1 + |\lambda_0| + \mathcal{N}(x_0)] \frac{\varepsilon}{1 + |\lambda_0| + \mathcal{N}(x_0)} = \varepsilon.$$

Sea pues

$$0 < \delta \leq \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon}{1 + |\lambda_0| + \mathcal{N}(x_0)} \right\}$$

y suponga que

$$\mathcal{N}_{\mathbb{R} \times E}((\lambda, x) - (\lambda_0, x_0)) \leq \delta.$$

Entonces se deben cumplir (4.3) y (4.5) y, por (4.2), (4.4) y (4.6), se debe tener

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\lambda x - \lambda_0 x_0) &\leq |\lambda| \mathcal{N}(x - x_0) + |\lambda - \lambda_0| \mathcal{N}(x_0) \\ &\leq [1 + |\lambda_0|] \mathcal{N}(x - x_0) + |\lambda - \lambda_0| \mathcal{N}(x_0) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el producto por escalares en continua en (λ_0, x_0) .

La parte (iii) es inmediata de (4.1) (Ejercicio). ■

Se demuestra de manera similar a la Proposición 4.3 el resultado siguiente (Ejercicio).

4.4 Proposición. Sea E un espacio normado. Para $a \in E$ y $\lambda \neq 0$ en $\mathbb{R}$ fijos, las funciones

$$x \mapsto a + x, \quad x \mapsto \lambda x \quad \text{y} \quad x \mapsto a + \lambda x$$

son homeomorfismos uniformemente continuos de E sobre E (En particular, dichas aplicaciones transforman conjuntos abiertos sobre conjuntos abiertos, cerrados sobre cerrados, compactos sobre compactos, conexos sobre conexos, sucesiones de Cauchy sobre sucesiones de Cauchy, sucesiones convergentes sobre sucesiones convergentes, etc.).

4.5 Lema. Sean E y F dos espacios normados. Una sucesión $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente (de Cauchy) en el espacio normado producto $E \times F$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x, y)$$

si y sólo si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente (de Cauchy) en E , $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente (de Cauchy) en F y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y.$$

Demostración. La demostración se sigue directamente de las relaciones (Ejercicio)

$$\max \{\mathcal{N}_E(u - x), \mathcal{N}_F(v - y)\} = \mathcal{N}_{E \times F}((u, v) - (x, y)) \leq \mathcal{N}_E(u - x) + \mathcal{N}_F(v - y),$$

$\forall (u, v), (x, y) \in E \times F$. ■

Aplicando la Proposición 4.2, el Lema 4.5 y compacidad secuencial se demuestra el resultado siguiente (Ejercicio).

4.6 Corolario. Sean A y B dos conjuntos en dos espacio normados E y F , respectivamente. Se tiene que $A \times B$ es un conjunto compacto en el espacio normado producto $E \times F$ si y sólo si A es compacto en E y B es compacto en F .

Una consecuencia inmediata de la Proposición 4.3 y del Lema 4.5 es el resultado siguiente (Ejercicio).

4.7 Corolario. Sea $(E, \mathcal{N})$ un espacio normado y sean $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones en E . Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \quad y \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$$

para ciertos $\lambda \in \mathbb{R}$, $x, y \in E$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n x_n = \lambda x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x + y \quad y \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(x_n) = \mathcal{N}(x).$$

Un **espacio de Banach** se definió anteriormente como un espacio normado completo $(E, \mathcal{N})$ (vea la Definición 3.8), es decir, un espacio donde cualquier sucesión de Cauchy en E converge a algún punto de E .

Se sigue de inmediato del Lema 4.5 el resultado siguiente (Ejercicio).

4.8 Corolario. Un espacio normado producto $E \times F$ es un espacio de Banach si y sólo si los espacios factores E y F son de Banach.

4.2. Ejemplos clásicos

4.2 Ejemplo. (Espacios de dimensión finita.) Se sabe que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es un espacio de Banach. Más generalmente, se puede demostrar con ayuda del Lema 4.5 (o como se demuestra en el Ejemplo 4.17) que $(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}_p)$ es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$. ◀

4.3 Ejemplo. (Espacios de sucesiones reales.) Los espacios de sucesiones reales $(\ell_p, \mathcal{N}_p)$, $1 \leq p \leq \infty$, son espacios de Banach (vea los Ejemplos 3.9 y 3.10). ◀

Espacio de funciones acotadas

Sea S un conjunto (no vacío). Se denota por $\mathcal{B}(S)$ el conjunto de todas las funciones acotadas de S en $\mathbb{R}$. Con la suma y el producto por escalares definidos puntualmente, es decir, $\forall f, g \in \mathcal{B}(S)$ y $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{y} \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad \forall x \in S,$$

$\mathcal{B}(S)$ es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$ (pues la suma y el producto por escalares de funciones acotadas son funciones acotadas). Se define la función $\mathcal{N}_\infty : \mathcal{B}(S) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\mathcal{N}_\infty(f) = \sup_{x \in S} |f(x)|, \quad \forall f \in \mathcal{B}(S).$$

Se verifica de inmediato que $\mathcal{N}_\infty$ es una norma sobre $\mathcal{B}(S)$, llamada la **norma uniforme**.

Al par $(\mathcal{B}(S), \mathcal{N}_\infty)$ se le llama el **espacio de funciones acotadas** de S en $\mathbb{R}$.

Observe que en los casos particulares $S = \{1, \dots, n\}$ y $S = \mathbb{N}$, el espacio normado $(\mathcal{B}(S), \mathcal{N}_\infty)$ coincide con $(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}_\infty)$ y $(\ell_\infty, \mathcal{N}_\infty)$, respectivamente.

En principio, una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ de un conjunto S en $\mathbb{R}$ puede converger a una función $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ de dos modos distintos: **puntualmente** en S , lo cual significa que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(s) - f(s)| = 0, \quad \forall s \in S;$$

o **uniformemente** en S , es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in S} |f_n(s) - f(s)| = 0,$$

lo cual significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{s \in S} |f_n(s) - f(s)| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq N,$$

equivalentemente, que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(s) - f(s)| \leq \varepsilon, \quad \forall s \in S \quad \text{y} \quad \forall n \geq N,$$

donde un mismo $N \in \mathbb{N}$ se utiliza en la desigualdad anterior para todos los puntos $s \in S$. Note que si $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión en el espacio normado $(\mathcal{B}(S), \mathcal{N}_\infty)$, entonces dicha sucesión converge uniformemente en S a alguna función $f \in \mathcal{B}(S)$ si y sólo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}_\infty(f_n - f) = 0,$$

es decir, la convergencia es con respecto a la norma $\mathcal{N}_\infty$ de $\mathcal{B}(S)$.

4.9 Proposición. $(\mathcal{B}(S), \mathcal{N}_\infty)$ es un espacio de Banach.

Demostración. Sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{B}(S)$. Se probará primeramente que $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge puntualmente en S a alguna función $f : S \rightarrow \mathbb{R}$. Fije $s \in S$.

Puesto que

$$|f_p(s) - f_q(s)| \leq \sup_{x \in S} |f_p(x) - f_q(x)| = \mathcal{N}_\infty(f_p - f_q), \quad \forall p, q \in \mathbb{N},$$

entonces $\{f_n(s)\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Existe pues $f(s) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(s) = f(s).$$

Como $s \in S$ es arbitrario, se tiene definida una función $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ que es el límite puntual en S de la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty$.

Se afirma que, de hecho, $f \in \mathcal{B}(S)$ y $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ converge a f con respecto a la norma de $\mathcal{B}(S)$. Sea $\varepsilon > 0$. Puesto que por hipótesis existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$(4.7) \quad \mathcal{N}_\infty(f_p - f_q) = \sup_{x \in S} |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall p, q \geq N,$$

necesariamente,

$$(4.8) \quad |f_p(s) - f_q(s)| \leq \varepsilon, \quad \forall p, q \geq N \quad \text{y} \quad \forall s \in S.$$

Fijando arbitrariamente $p \geq N$ y $s \in S$, se sigue de (4.8) que

$$|f_p(s) - f(s)| = \lim_{q \rightarrow \infty} |f_p(s) - f_q(s)| \leq \varepsilon,$$

o sea,

$$(4.9) \quad |f_p(s) - f(s)| \leq \varepsilon, \quad \forall p \geq N \quad \text{y} \quad \forall s \in S,$$

es decir, que ε es una cota superior del conjunto de valores en $\mathbb{R}$

$$\{|f_p(s) - f(s)| \mid s \in S, p \geq N\}.$$

En particular, como f_N es acotada, si $M \geq 0$ es tal que $|f_N(s)| \leq M$, $\forall s \in S$, se debe tener, por (4.9), que

$$|f(s)| \leq |f_N(s)| + \varepsilon \leq M + \varepsilon, \quad \forall s \in S,$$

concluyendo así que f es acotada, es decir, $f \in \mathcal{B}(S)$. Se sigue también de (4.9) que

$$\mathcal{N}_\infty(f_p - f) = \sup_{s \in S} |f_p(s) - f(s)| \leq \varepsilon, \quad \forall p \geq N,$$

lo cual significa que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \mathcal{N}_\infty(f_p - f) = 0,$$

probando la afirmación. Por lo tanto, $\mathcal{B}(S)$ es completo. ■

4.4 Ejemplo. En cursos posteriores se demostrará que el espacio $(\mathcal{C}([0, 1]), \mathcal{N}_1)$ de funciones continuas de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$ provisto de la norma

$$\mathcal{N}_1(f) = \int_0^1 |f(t)| dt, \quad \forall f \in \mathcal{C}([0, 1]),$$

no es un espacio de Banach. ◀

Ejemplos adicionales de espacios normados y de Banach serán discutidos más adelante.

4.3. Subespacios

Si E es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$ y A es un subconjunto de E , recuerde que A es a su vez un espacio vectorial sobre campo $\mathbb{R}$ si y sólo si las restricciones de la adición y del producto por escalares de E sobre A hacen de A un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$, es decir, si y sólo se cumple la condición

$$x, y \in A \quad \text{y} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \implies \quad x + \lambda y \in A.$$

4.5 Definición. Sea $(E, \mathcal{N})$ un espacio normado sobre el campo $\mathbb{R}$ y sea A un subespacio vectorial de E . La restricción de $\mathcal{N}$ a A es también una norma sobre A . Al espacio normado $(A, \mathcal{N})$ se le llama **subespacio normado** (o si no hay peligro de confusión, **subespacio**) del espacio normado $(E, \mathcal{N})$.

Si A es un subespacio normado de un espacio normado E , entonces la topología propia de A coincide con la topología de A inducida por la de E (¿Por qué?). Note que si A es un subconjunto de E que no es un subespacio vectorial, entonces A no puede ser un subespacio normado de E (sólo puede ser un subespacio métrico de E).

A continuación se discuten algunos subespacios normados clásicos.

Espacio de sucesiones ϕ_0

Se denota por ϕ_0 el conjunto de todas las sucesiones de números reales que son eventualmente constantes de valor cero, es decir, $x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \phi_0$ si y sólo si $x(n) = 0$ salvo para un número finito de índices n , o sea, existe $N \in \mathbb{N}$, donde $N = N(x)$ depende de x , tal que $x(n) = 0, \forall n > N$.

Es claro que ϕ_0 es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$ con la adición y el producto por escalares usuales de sucesiones, se llama el **espacio de sucesiones eventualmente constantes de valor cero**. Una base (algebraica) de ϕ_0 está formada por el conjunto numerable de vectores $\{e_n = \{e_n(k)\}_{k=1}^\infty \mid n \in \mathbb{N}\}$, donde

$$e_n(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n, \\ 0 & \text{si } k \neq n, \end{cases}$$

de hecho, si $x = \{x(n)\}_{n=1}^\infty \in \phi_0$ y $N \in \mathbb{N}$ es tal que $x(n) = 0, \forall n > N$, entonces

$$x = \sum_{n=1}^N x(n)e_n.$$

El conjunto ϕ_0 claramente (Ejercicio) está contenido en ℓ_p . Luego $(\phi_0, \mathcal{N}_p)$ es un subespacio normado de $(\ell_p, \mathcal{N}_p)$, $1 \leq p \leq \infty$.

4.10 Proposición. ϕ_0 es un subespacio denso de ℓ_p , para $1 \leq p < \infty$.

Demostración. Fije $x = \{x(n)\}_{n=1}^\infty \in \ell_p$ y sea $\varepsilon > 0$. Ya que

$$\sum_{n=1}^\infty |x(n)|^p < \infty,$$

existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$(4.10) \quad \sum_{n=N+1}^\infty |x(n)|^p < \varepsilon^p.$$

Sea $y \in \phi_0$ definido como

$$y = \sum_{n=1}^N x(n)e_n,$$

es decir, $y = \{y(n)\}_{n=1}^\infty$ es la sucesión

$$y(n) = \begin{cases} x(n) & \text{si } n \leq N, \\ 0 & \text{si } n > N. \end{cases}$$

Por (4.10), se tiene

$$\mathcal{N}_p(x - y) = \left[\sum_{n=1}^\infty |x(n) - y(n)|^p \right]^{1/p} = \left[\sum_{n=N+1}^\infty |x(n)|^p \right]^{1/p} < \varepsilon,$$

es decir, $y \in B(x, \varepsilon) \cap \phi_0$. ■

4.11 Proposición. ϕ_0 no es un subespacio denso de ℓ_∞ .

Demostración. Sean $\underline{1} = \{1\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_{\infty}$ (sucesión constante de valor uno) y $\varepsilon_0 = 1/2$. Dado $y \in \phi_0$ arbitrario, existe $N = N(y) \in \mathbb{N}$ tal que $y(n) = 0, \forall n > N$, luego

$$\mathcal{N}_{\infty}(\underline{1} - y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |1 - y(n)| \geq |1 - y(N+1)| = 1,$$

es decir, $B(\underline{1}, \varepsilon_0) \cap \phi_0 = \emptyset$. Por lo tanto, ϕ_0 no es un subespacio denso de ℓ_{∞} . ■

Espacio de sucesiones $\mathfrak{c}_0$

Se denota por $\mathfrak{c}_0$ el conjunto de todas las sucesiones de números reales que convergen a cero, es decir, $x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{c}_0$ si y sólo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = 0.$$

El conjunto $\mathfrak{c}_0$ también es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$ con la adición y el producto por escalares usuales de sucesiones, se llama el **espacio de sucesiones convergentes a cero**. Claramente ϕ_0 está contenido en $\mathfrak{c}_0$, sin embargo, $\mathfrak{c}_0$ no está contenido en ℓ_p para $1 \leq p < \infty$, pues el lector puede verificar fácilmente, por ejemplo, que la sucesión $\{1/n^{1/p}\}_{n=1}^{\infty}$ pertenece a $\mathfrak{c}_0$ pero no a ℓ_p . Pero, ya que toda sucesión convergente de números reales es acotada, $\mathfrak{c}_0$ sí está contenido en ℓ_{∞} . Así pues, $(\mathfrak{c}_0, \mathcal{N}_{\infty})$ es un subespacio normado de $(\ell_{\infty}, \mathcal{N}_{\infty})$.

4.12 Proposición. $\mathfrak{c}_0$ es un subespacio cerrado de ℓ_{∞} . En particular, $(\mathfrak{c}_0, \mathcal{N}_{\infty})$ es un espacio de Banach.

Demostración. Se probará que el complemento $\ell_{\infty} \setminus \mathfrak{c}_0$ de $\mathfrak{c}_0$ es un conjunto abierto en ℓ_{∞} . Sea pues $x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_{\infty} \setminus \mathfrak{c}_0$. Ya que la sucesión $\{x(n)\}_{n=1}^{\infty}$ no converge a cero, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$(4.11) \quad |x(n)| \geq 2\varepsilon_0, \quad \forall n \in J,$$

donde J es algún subconjunto infinito de $\mathbb{N}$. Si $y \in B(x, \varepsilon_0)$, es decir,

$$\varepsilon_0 > \mathcal{N}_{\infty}(x - y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x(n) - y(n)|,$$

entonces

$$|x(n) - y(n)| < \varepsilon_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Puesto que $|x(n)| - |y(n)| \leq |x(n) - y(n)|$, necesariamente

$$|y(n)| > |x(n)| - \varepsilon_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se sigue de esto y de (4.11) que

$$|y(n)| > |x(n)| - \varepsilon_0 \geq \varepsilon_0, \quad \forall n \in J.$$

Siendo $J \subset \mathbb{N}$ infinito, esto prueba que la sucesión $\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}$ no converge a cero, es decir, $y \notin \mathfrak{c}_0$. Por lo tanto, $B(x, \varepsilon_0) \cap \mathfrak{c}_0 = \emptyset$, es decir, $B(x, \varepsilon_0) \subset \ell_{\infty} \setminus \mathfrak{c}_0$.

Siendo ℓ_{∞} un espacio de Banach y $\mathfrak{c}_0$ un subconjunto cerrado de ℓ_{∞} , se sigue sin más que $(\mathfrak{c}_0, \mathcal{N}_{\infty})$ es un espacio de Banach. ■

4.13 Proposición. ϕ_0 es un subespacio denso de $(\mathfrak{c}_0, \mathcal{N}_{\infty})$.

Demostración. Sea $x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{c}_0$ y sea $\varepsilon > 0$. Como $\{x(n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a cero, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$(4.12) \quad |x(n)| \leq \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

Sea $y \in \phi_0$ definido como

$$y = \sum_{n=1}^N x(n)e_n.$$

Por (4.12), se tiene

$$\mathcal{N}_{\infty}(x - y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x(n) - y(n)| = \sup_{n > N} |x(n)| \leq \varepsilon,$$

es decir, $y \in B'(x, \varepsilon) \cap \phi_0$. ■

Espacio de funciones $\mathcal{BC}(S)$

Sea (S, d) un espacio métrico. Se denota por $\mathcal{C}(S)$ el conjunto de funciones continuas de S en $\mathbb{R}$ y por $\mathcal{BC}(S)$, el conjunto de funciones continuas y acotadas de S en $\mathbb{R}$. Los conjuntos anteriores son espacios vectoriales sobre el campo $\mathbb{R}$ con la adición y producto por escalares definidas puntualmente.

Se tiene que $\mathcal{BC}(S)$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial $\mathcal{B}(S)$ de funciones acotadas de S en $\mathbb{R}$, de hecho,

$$\mathcal{BC}(S) = \mathcal{C}(S) \cap \mathcal{B}(S).$$

Entonces $(\mathcal{BC}(S), \mathcal{N}_\infty)$ es un subespacio del espacio normado $(\mathcal{B}(S), \mathcal{N}_\infty)$, donde

$$\mathcal{N}_\infty(f) = \sup_{x \in S} |f(x)|, \quad \forall f \in \mathcal{B}(S),$$

es la norma uniforme, conocido como el **espacio de funciones continuas acotadas** de S en $\mathbb{R}$.

Observe que si S es un espacio métrico compacto (por ejemplo, un intervalo $[a, b]$ en $\mathbb{R}$), se tendría que $\mathcal{C}(S) = \mathcal{BC}(S)$, pues $\mathcal{C}(S) \subset \mathcal{B}(S)$.

4.14 Proposición. $\mathcal{BC}(S)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{B}(S)$. En particular, $(\mathcal{BC}(S), \mathcal{N}_\infty)$ es un espacio de Banach.

Demostración. Sea $f \in \overline{\mathcal{BC}(S)}$. Ya que f es acotada (por ser un elemento de $\mathcal{B}(S)$), para probar que $f \in \mathcal{BC}(S)$ basta probar que f es continua en S . Fije $x_0 \in S$ y sea $\varepsilon > 0$. Existe $g \in B(f, \varepsilon/3) \cap \mathcal{BC}(S)$, es decir,

$$(4.13) \quad \mathcal{N}_\infty(f - g) = \sup_{x \in S} |f(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Puesto que $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en x_0 , existe $\delta > 0$ tal que

$$(4.14) \quad x \in S \quad \text{y} \quad d(x, x_0) < \delta \quad \implies \quad |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Se sigue de (4.13) y (4.14) que si $x \in S$ y $d(x, x_0) < \delta$, entonces

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - g(x_0)| + |g(x_0) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Esto muestra que f es continua en x_0 .

Siendo $\mathcal{B}(S)$ un espacio de Banach y $\mathcal{BC}(S)$ un subconjunto cerrado, se sigue sin más que $(\mathcal{BC}(S), \mathcal{N}_\infty)$ es un espacio de Banach. ■

Como consecuencia inmediata de este resultado se seguirá que si una sucesión de funciones continuas de S en $\mathbb{R}$ converge a alguna función $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente en S , entonces f tiene que ser continua y acotada en S . En el Capítulo 5 se desarrollará con mayor detalle este y otros resultados relacionados con espacios de funciones.

Espacios normados separables

Sea A un subconjunto de un espacio vectorial E sobre el campo $\mathbb{R}$. Se sabe que la intersección de cualquier familia de subespacios vectoriales de E es un subespacio vectorial

de E . El **subespacio generado** por A , denotado por $\text{lin}(A)$, es la intersección de todos los subespacios vectoriales de E que contienen a A (dicha intersección no es vacía ya que E mismo es uno de esos subespacios). El conjunto $\text{lin}(A)$ es pues un subespacio vectorial de E , es el subespacio vectorial más pequeño de E que contiene a A . Los elementos de $\text{lin}(A)$ son, de hecho, todas las combinaciones lineales finitas de elementos de A .

4.15 Teorema. *Un espacio normado E es separable si y sólo si existe un subconjunto A de E a lo sumo numerable tal que $\text{lin}(A)$ es denso en E .*

Demostración. La necesidad de la condición se cumple trivialmente (¿Por qué?). Suponga entonces que se cumpla la condición. Sea pues $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto de E tal que $\text{lin}(A)$ es denso. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $a_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (¿Por qué?). Defina D como el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas “rationales” de A , es decir,

$$D = \left\{ \sum_{k=1}^n r_k a_k \mid r_k \in \mathbb{Q}, k = 1, \dots, n, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Se afirma que D es denso en E . En efecto, sean $x \in E$ y $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, existen $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathcal{N} \left(x - \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k \right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

También existen $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Q}$ tales que

$$|r_k - \lambda_k| < \frac{\varepsilon/2}{n\mathcal{N}(a_k)}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Claramente $\sum_{k=1}^n r_k a_k \in D$ y

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \left(x - \sum_{k=1}^n r_k a_k \right) &\leq \mathcal{N} \left(x - \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k \right) + \mathcal{N} \left(\sum_{k=1}^n r_k a_k - \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k \right) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^n |r_k - \lambda_k| \mathcal{N}(a_k) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto prueba la afirmación.

Finalmente, se afirma que D es un conjunto numerable. En efecto, basta observar que

$$D \sim \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n$$

el cual es un conjunto numerable, por la Proposición 1.6. ■

4.6 Ejemplo. Se demostró en el Ejemplo 2.52 que el espacio normado $(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}_p)$, $1 \leq p \leq \infty$, es separable. Una demostración alternativa sería la siguiente. Puesto que

$$\mathbb{R}^n = \text{lin}(\{e_j \mid j = 1, \dots, n\}),$$

donde $e_j = (e_{j,1}, \dots, e_{j,n})$ con $e_{j,j} = 1$ y $e_{j,k} = 0$ si $k \neq j$, $j = 1, \dots, n$, y el conjunto $\{e_j \mid j = 1, \dots, n\}$ es finito, se sigue del Teorema 4.15 que $\mathbb{R}^n$ es separable. ◀

4.7 Ejemplo. Se demostró anteriormente en la Proposición 2.24 que el espacio de sucesiones ℓ_p es un espacio normado separable para $1 \leq p < \infty$. Una demostración alternativa sería la siguiente. En la Proposición 4.10 se probó que el espacio de sucesiones eventualmente constantes de valor cero ϕ_0 es denso en ℓ_p , pero

$$\phi_0 = \text{lin}(\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}),$$

donde $e_n = \{e_n(k)\}_{k=1}^\infty$ es la sucesión

$$e_n(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n, \\ 0 & \text{si } k \neq n, \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ya que el conjunto $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es numerable, la conclusión se sigue del Teorema 4.15. ◀

4.8 Ejemplo. En la Proposición 4.13 se mostró que ϕ_0 es denso en el espacio de sucesiones convergentes a cero provisto de la norma uniforme $(\mathfrak{c}_0, \mathcal{N}_\infty)$. Ya que

$$\phi_0 = \text{lin}(\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}),$$

donde el conjunto $\{e_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es numerable, se concluye del Teorema 4.15 que $\mathfrak{c}_0$ es un espacio normado separable. ◀

4.16 Proposición. *El espacio de funciones acotadas $(\mathcal{B}(S), \mathcal{N}_\infty)$ de un conjunto S en $\mathbb{R}$ provisto de la norma uniforme es separable si y sólo si el conjunto S es finito.*

Demostración. Suficiencia. Suponga que S es finito. Entonces $S \sim \{1, \dots, n\}$, para algún $n \in \mathbb{N}$. Así pues los espacios normados $(\mathcal{B}(S), \mathcal{N}_\infty)$ y $(\mathcal{B}(\{1, \dots, n\}), \mathcal{N}_\infty)$ son isométricos vía dicha equivalencia. Por otra parte, ya que toda función $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$ se identifica

de manera natural con el vector $(f(1), \dots, f(n))$ en $\mathbb{R}^n$, pues $f = g$ si y sólo si

$$f(k) = g(k), \quad k = 1, \dots, n,$$

si y sólo si

$$(f(1), \dots, f(n)) = (g(1), \dots, g(n));$$

entonces los espacios normados $(\mathcal{B}(\{1, \dots, n\}), \mathcal{N}_\infty)$ y $(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}_\infty)$ son isométricos vía esta otra identificación. Se concluye pues que $(\mathcal{B}(S), \mathcal{N}_\infty)$ y $(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}_\infty)$ son isométricos. Como $(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}_\infty)$ es separable (vea el Ejemplo 4.6), entonces $(\mathcal{B}(S), \mathcal{N}_\infty)$ también es separable (¿Por qué?).

Necesidad. Suponga ahora que S es infinito. Se debe probar que $(\mathcal{B}(S), \mathcal{N}_\infty)$ no es separable. Por la Proposición 1.11, $\text{Card } S < \text{Card } \mathcal{P}(S)$, luego $\mathcal{P}(S)$ debe ser un conjunto infinito no numerable (pues S contiene un subconjunto numerable -vea la Proposición 1.7-). Para cada $A \in \mathcal{P}(S)$ se define la función característica $\chi_A : S \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\chi_A(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \in A, \\ 0 & \text{si } s \notin A. \end{cases}$$

Observe que $\chi_A \in \mathcal{B}(S)$, $\forall A \in \mathcal{P}(S)$. Además, claramente $\chi_A = \chi_B$ si y sólo si $A = B$. Note que

$$(4.15) \quad \mathcal{N}_\infty(\chi_A - \chi_B) = \sup_{s \in S} |\chi_A(s) - \chi_B(s)| = 1, \quad \forall A, B \in \mathcal{P}(S), A \neq B.$$

Sea D es un conjunto denso en $\mathcal{B}(S)$. Entonces, $\forall A \in \mathcal{P}(S)$ existe $f_A \in D$ tal que

$$(4.16) \quad \mathcal{N}_\infty(f_A - \chi_A) < \frac{1}{2}.$$

Se afirma que la aplicación $A \mapsto f_A$ de $\mathcal{P}(S)$ en D es inyectiva. En efecto, si $f_A = f_B$, entonces

$$\mathcal{N}_\infty(\chi_A - \chi_B) \leq \mathcal{N}_\infty(\chi_A - f_A) + \mathcal{N}_\infty(f_B - \chi_B) < 1,$$

por (4.16), luego $A = B$, por (4.15). Así pues, $\text{Card } \mathcal{P}(S) \leq \text{Card } D$. Por lo tanto, D es infinito no numerable. ■

4.9 Ejemplo. El espacio normado $(\ell_\infty, \mathcal{N}_\infty)$ no es separable. Esto se sigue de inmediato del ejemplo anterior al observar que el espacio normado $(\ell_\infty, \mathcal{N}_\infty)$ es linealmente isométrico a $(\mathcal{B}(\mathbb{N}), \mathcal{N}_\infty)$ (Explique). ◀

Subespacios y subconjuntos

Se tienen los resultados siguientes referentes al comportamiento de los subespacios bajo las operaciones topológicas de adherencia e interior y de los subconjuntos bajo las operaciones algebraicas de la adición y producto por escalares.

4.17 Proposición. *En un espacio normado, la adherencia de cualquier subespacio vectorial es un subespacio vectorial.*

Demostración. Sea A un subespacio vectorial de un espacio normado E . Fije $x, y \in \overline{A}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Existen dos sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ en A que convergen a x y y , respectivamente. De acuerdo con el Corolario 4.7, se tiene

$$x + y = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \quad \text{y} \quad \lambda x = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda x_n.$$

Ya que $\{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{\lambda x_n\}_{n=1}^{\infty}$ son dos sucesiones en A (por ser A subespacio), se concluye que $x + y, \lambda x \in \overline{A}$. Por lo tanto, $\overline{A}$ es un subespacio vectorial de E . ■

4.18 Proposición. *El interior de todo subespacio propio de un espacio normado es un conjunto vacío.*

Demostración. Sea A un subespacio de un espacio normado E tal que $A^\circ \neq \emptyset$. Se debe probar que $A = E$. Sea $a \in A^\circ$. Existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset A$.

Se afirma que $B(0, r) \subset A$. En efecto, sea $x \in B(0, r)$. Es claro que $a + x \in B(a, r) \subset A$, pues

$$\mathcal{N}((a + x) - a) = \mathcal{N}(x) < r.$$

Ya que $a, a + x \in A$ y A es subespacio, necesariamente $x = (a + x) - a \in A$.

Se afirma ahora que $A = E$. En efecto, sea $x \neq 0$ en E . Se tiene

$$\frac{r}{2\mathcal{N}(x)}x \in B(0, r) \subset A.$$

Luego,

$$x = \frac{2\mathcal{N}(x)}{r} \left[\frac{r}{2\mathcal{N}(x)}x \right] \in A,$$

por ser A subespacio. Finalmente, $0 \in A$, por ser A subespacio. Esto prueba la afirmación. ■

Por ejemplo, cualquier plano, recta o conjunto reducido a un punto tiene interior vacío en $\mathbb{R}^3$, en virtud de las Proposiciones 4.17 y 4.4.

4.10 Definición. Sean A, B dos subconjuntos de un espacio vectorial E y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Se definen los subconjuntos de E siguientes

$$\lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\} \quad \text{y} \quad A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}.$$

En lo sucesivo, la bola unitaria cerrada $B'(0, 1)$ de un espacio normado E será denotada por U_E o U (si no hay peligro de confusión).

Con esta notación, si $\delta > 0$, entonces δU denota el conjunto

$$\{x \in E \mid \mathcal{N}(x) < \delta\}.$$

4.19 Proposición. En todo espacio normado E se cumplen las afirmaciones siguientes.

i. Si A es un conjunto abierto en E y B es un subconjunto de E , entonces $A + B$ es un conjunto abierto en E .

ii. Si A y B son dos conjuntos compactos en E , entonces $A + B$ es un conjunto compacto en E .

iii. Si A es un conjunto compacto en E y B es un conjunto cerrado en E , entonces $A + B$ es un conjunto cerrado en E .

Demostración. (i). Por la Proposición 4.4, para cada $b \in B$ el conjunto $A + b$ es abierto en E . Luego,

$$A + B = \bigcup_{b \in B} (A + b)$$

es un conjunto abierto en E .

(ii). Por el Corolario 4.6, $A \times B$ es un conjunto compacto en $E \times E$. Por la Proposición 4.3, parte (ii), la función $(x, y) \mapsto x + y$ es continua del espacio producto $E \times E$ en E . Entonces que $A + B$ debe ser un conjunto compacto en E .

(iii). Fije $x \notin A + B$. Para probar que $A + B$ es cerrado se debe mostrar que $x \notin \overline{A + B}$, es decir, $d(x, A + B) > 0$ (vea el Ejercicio 2.13). Como $x \notin A + B$, se tiene $x - a \notin B, \forall a \in A$. Por el Ejercicio 2.13, se debe tener

$$(4.17) \quad d(x - a, B) > 0, \quad \forall a \in A,$$

pues B es un conjunto cerrado. Considere la función $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(y) = d(x - y, B), \quad \forall y \in E.$$

Se sigue del Ejercicio 2.12 que f es una función (uniformemente) continua en E . Siendo A un conjunto compacto en E , f alcanza su mínimo valor en algún punto de A , es decir, existe $a_0 \in A$ tal que

$$d(x - a, B) = f(a) \geq f(a_0) = d(x - a_0, B), \quad \forall a \in A.$$

Sea $\delta = d(x - a_0, B)$. Entonces $\delta > 0$ y se tiene

$$\delta \leq d(x - a, B) \leq \mathcal{N}((x - a) - b) = \mathcal{N}(x - (a + b)), \quad \forall a \in A \quad \text{y} \quad b \in B.$$

Por lo tanto,

$$d(x, A + B) = \inf_{a \in A, b \in B} \mathcal{N}(x - (a + b)) \geq \delta > 0,$$

es decir, $x \notin \overline{A + B}$. ■

Por ejemplo, si B es un subconjunto arbitrario de un espacio normado E , el lector puede verificar como ejercicio que

$$B + U = \{x \in E \mid d(x, B) < 1\}.$$

Por la proposición anterior este conjunto debe ser abierto en E . ¿Será cerrado el conjunto $\{x \in E \mid d(x, B) \leq 1\}$? (Ejercicio).

Sin embargo la suma de dos conjuntos cerrados en un espacio normado puede no ser un conjunto cerrado, como lo muestra el siguiente ejemplo.

4.11 Ejemplo. En $(\mathbb{R}^2, \mathcal{N}_p)$, $1 \leq p \leq \infty$, considere los conjuntos

$$A = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\} \quad \text{y} \quad B = \left\{ \left(x, \frac{1}{x} \right) \mid x > 0 \right\}.$$

Se verifica de inmediato (Ejercicio) que A y B son conjuntos cerrados en $\mathbb{R}^2$ pero que

$$A + B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$

no es un conjunto cerrado. ◀

4.4. Aplicaciones lineales continuas

Sean E y F dos espacios vectoriales sobre el campo $\mathbb{R}$. Recuerde que una función $T : E \rightarrow F$ se llama **aplicación lineal** si

$$T(x + \lambda x') = T(x) + \lambda T(x'), \quad \forall x, x' \in E \quad \text{y} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

El **kernel** (**núcleo** o **espacio nulo**) de T es el conjunto

$$\ker T = T^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E \mid T(x) = 0_F\}.$$

Se sabe que $\ker T$ es un subespacio vectorial de E . También se sabe que T es inyectiva si y sólo si $\ker T = \{0_E\}$.

Se denotará por $\underline{0}$ la aplicación lineal constante de E en F valor cero y por I_E (o por I , si no hay peligro de confusión) la aplicación identidad de E sobre E .

La continuidad de una aplicación lineal queda caracterizada de la siguiente manera.

4.20 Teorema. *Sea T una aplicación lineal de un espacio normado E en un espacio normado F . Las afirmaciones siguientes son equivalentes a pares.*

- i. T es continua en E .
- ii. T es continua en 0_E .
- iii. Existe $M > 0$ tal que

$$\mathcal{N}_F(T(x)) \leq M \mathcal{N}_E(x), \quad \forall x \in E.$$

Demostración. (i) implica (ii). Si T es continua en E , claramente T es continua en el punto 0_E .

(ii) implica (iii). Por linealidad, $T(0_E) = 0_F$. Por hipótesis, dado $\varepsilon = 1$ existe $\delta > 0$ tal que

$$(4.18) \quad \mathcal{N}_E(x) \leq \delta \quad \implies \quad \mathcal{N}_F(T(x)) \leq 1.$$

Se afirma que

$$(4.19) \quad \mathcal{N}_F(T(x)) \leq \frac{1}{\delta} \mathcal{N}_E(x), \quad \forall x \in E.$$

En efecto, la desigualdad se cumple trivialmente si $x = 0_E$. Suponga pues que $x \neq 0_E$. Ya que $[\delta/\mathcal{N}_E(x)]x \in B'(0_E, \delta)$, se tiene

$$1 \geq \mathcal{N}_F \left[\frac{\delta}{\mathcal{N}_F(T(x))} x \right] = \frac{\delta}{\mathcal{N}_E(x)} \mathcal{N}_F(T(x)),$$

por (4.18). Esto prueba la afirmación. Si $M = 1/\delta$, entonces (4.19) implica

$$\mathcal{N}_F(T(x)) \leq M \mathcal{N}_E(x), \quad \forall x \in E.$$

(iii) implica (i). Observe que por ser T lineal, la hipótesis implica

$$\mathcal{N}_F(T(x) - T(x')) = \mathcal{N}_F(T(x - x')) \leq M \mathcal{N}_E(x - x'), \quad \forall x, x' \in E.$$

Luego T es lipschitziana, de donde, T es, de hecho, uniformemente continua en E . ■

Se rescata de la última conclusión de la prueba anterior el resultado siguiente.

4.21 Corolario. *Toda aplicación lineal continua de un espacio normado en un espacio normado es uniformemente continua.*

4.12 Ejemplo. Sea T la aplicación lineal de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{N}_\infty)$ en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{N}_\infty)$ dada por

$$T(x, y) = (-2x + y, x - y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Se afirma que T es continua. En efecto, se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\infty(T(x, y)) &= \max\{|-2x + y|, |x - y|\} \leq \max\{2|x| + |y|, |x| + |y|\} \\ &= 2|x| + |y| \leq 3 \max\{|x|, |y|\} = 3\mathcal{N}_\infty(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Esto prueba que T es continua (más adelante se mostrará que toda aplicación lineal entre dos espacios normados de dimensión finita siempre es continua). ◀

4.13 Ejemplo. Considere el espacio vectorial ϕ_0 de todas las sucesiones de números reales eventualmente constantes de valor cero. Se define $f \in \phi'_0$ como

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n), \quad \forall x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \phi_0.$$

Note que f está bien definido porque sólo un número finito de términos de la sucesión x son distintos de cero. Además, $f : \phi_0 \rightarrow \mathbb{R}$ es claramente lineal.

Se afirma que si se identifica a ϕ_0 como subespacio de ℓ_1 , entonces $f \in \phi_0^*$, pero que si ϕ_0 se identifica como subespacio de ℓ_∞ , entonces ϕ_0 no es continuo.

En efecto, se tiene

$$|f(x)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} x(n) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| = 1 \cdot \mathcal{N}_1(x), \quad \forall x \in \phi_0.$$

Esto prueba que f es continuo sobre $(\phi_0, \mathcal{N}_1)$.

Por otra parte, dado $M > 0$ arbitrario, si

$$x = \{x(k)\}_{k=1}^{\infty} = \sum_{k=1}^{M+1} e_k,$$

es decir,

$$x(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \leq M+1, \\ 0 & \text{si } k > M+1, \end{cases}$$

entonces

$$|f(x)| = M+1 > M \cdot 1 = M\mathcal{N}_{\infty}(x).$$

Así pues, no se cumple la condición (iii) del Teorema 4.20. Por lo tanto, f no es continuo sobre $(\phi_0, \mathcal{N}_{\infty})$. ◀

4.14 Ejemplo. Considere el espacio vectorial $\mathcal{C}([a, b])$ formado por todas las funciones continuas $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $\phi : \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ el funcional lineal

$$\phi(f) = \int_a^b f(t) dt, \quad \forall f \in \mathcal{C}([a, b]).$$

Se afirma que $\phi \in \mathcal{C}([a, b])^*$ si se provee a $\mathcal{C}([a, b])$ ya sea de la norma uniforme $\mathcal{N}_{\infty}$ o de la norma $\mathcal{N}_1$.

En efecto, se tiene

$$|\phi(f)| = \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt \leq \int_a^b \mathcal{N}_{\infty}(f) dt = (b-a)\mathcal{N}_{\infty}(f), \quad \forall f \in \mathcal{C}([a, b]).$$

Esto prueba que ϕ es continuo sobre $(\mathcal{C}([a, b]), \mathcal{N}_{\infty})$.

También se tiene que

$$|\phi(f)| = \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt = 1 \cdot \mathcal{N}_1(f), \quad \forall f \in \mathcal{C}([a, b]).$$

Leugo ϕ es continuo sobre $(\mathcal{C}([a, b]), \mathcal{N}_1)$. ◀

Se verá a continuación que la propiedad de linealidad

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

sigue cumpliéndose para combinaciones lineales numerables si T es continua.

4.15 Definición. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en un espacio normado E . Se define

$$s_n = \sum_{k=1}^n x_k, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se llama **serie** de término general x_n a la pareja de sucesiones $\{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{s_n\}_{n=1}^{\infty}\}$. La sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es la **sucesión de sumas parciales** de la serie. Se dice que la serie de término general x_n es **convergente** en E si existe $s \in E$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s.$$

En este caso, a s se le llama la **suma** de la serie y se escribe

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s.$$

Para designar a la serie de término general x_n se acostumbra usar la notación ambigua siguiente (costumbre que adoptaremos)

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

4.22 Corolario. Sean T una aplicación lineal continua de un espacio normado E en un espacio normado F y sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en E . Si

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x,$$

para algún $x \in E$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} T(x_n) = T(x).$$

Demostración. Por hipótesis,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x,$$

donde

$$s_n = \sum_{k=1}^n x_k, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por ser T lineal y continua, se debe tener

$$T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T \left[\sum_{k=1}^n x_k \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n T(x_k) = \sum_{n=1}^{\infty} T(x_n). \blacksquare$$

En la Sección 4.7 se dará una caracterización de la completez de un espacio normado por medio de series.

Normas equivalentes

4.16 Definición. Se dice que dos normas $\mathcal{N}$ y $\|\cdot\|$ sobre un mismo espacio vectorial E son **normas equivalentes** si las métricas inducidas por dichas normas son topológicamente equivalentes.

4.23 Teorema. Dos normas $\mathcal{N}$ y $\|\cdot\|$ sobre un mismo espacio vectorial E son equivalentes si y sólo si existen constantes $\alpha, \beta > 0$ tales que

$$\alpha\mathcal{N}(x) \leq \|x\| \leq \beta\mathcal{N}(x), \quad \forall x \in E.$$

Demostración. Las normas $\mathcal{N}$ y $\|\cdot\|$ sobre E son equivalentes si y sólo si la función identidad I de $(E, \mathcal{N})$ en $(E, \|\cdot\|)$ y su función inversa son continuas (vea la Proposición 2.37). Ya que la función identidad y su inversa son aplicaciones lineales, dichas funciones son continuas si y sólo si existen constantes $\alpha, \beta > 0$ tales que

$$\mathcal{N}(x) \leq \frac{1}{\alpha}\|x\| \quad \text{y} \quad \|x\| \leq \beta\mathcal{N}(x), \quad \forall x \in E,$$

que es la condición del enunciado. ■

De acuerdo al Corolario 4.21, si dos normas $\mathcal{N}$ y $\|\cdot\|$ sobre un mismo espacio vectorial E son equivalentes, entonces dichas normas son, de hecho, uniformemente equivalentes. De esto y de la Observación 3.12 se siguen de inmediato (Ejercicio) los dos resultados siguientes.

4.24 Corolario. Sean $\mathcal{N}$ y $\|\cdot\|$ dos normas equivalentes sobre un mismo espacio vectorial E . Entonces $(E, \mathcal{N})$ es de Banach si y sólo si $(E, \|\cdot\|)$ es de Banach.

4.17 Ejemplo. En $\mathbb{R}^n$ las normas $\mathcal{N}_p$, $1 \leq p \leq \infty$, son todas equivalentes.

En efecto basta observar que, para $1 \leq p < \infty$, se cumple

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\infty(x) = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} &\leq \left[\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right]^{1/p} = \mathcal{N}_p(x) \\ &\leq n^{1/p} \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = n^{1/p} \mathcal{N}_\infty(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Puesto que $(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}_\infty)$ es el espacio normado producto de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ con sí mismo n veces

y éste es de Banach, se concluye de los Corolarios 4.8 y 4.24 que $(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}_p)$ es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$. ◀

Más generalmente, puesto que la composición de dos funciones uniformemente continuas es una función uniformemente continua, se tiene el resultado siguiente.

4.25 Corolario. Sean $\mathcal{N}$ y $\|\cdot\|$ dos normas equivalentes sobre un mismo espacio vectorial E y sea X un espacio métrico. Entonces $f : E \rightarrow X$ y $g : X \rightarrow E$ son uniformemente continuas con respecto a la norma $\mathcal{N}$ si y sólo si lo son con respecto a la norma $\|\cdot\|$.

Otra consecuencia directa del Teorema 4.23 es el resultado siguiente (Ejercicio).

4.26 Corolario. Sean $\mathcal{N}$ y $\|\cdot\|$ dos normas equivalentes sobre un mismo espacio vectorial E . Entonces $(E, \mathcal{N})$ y $(E, \|\cdot\|)$ poseen los mismos conjuntos acotados.

4.5. El espacio normado $CL(E, F)$

Sean E y F dos espacios vectoriales sobre el campo $\mathbb{R}$. Se denota por $L(E, F)$ el conjunto de todas las aplicaciones lineales de E en F . Se sabe que $L(E, F)$ es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$ con la adición y el producto por escalares usuales de funciones, es decir, definidos puntualmente. En el caso particular de que $E = F$, se escribirá $L(E, E) = L(E)$. El espacio vectorial $L(E, \mathbb{R})$, consistente de todas las aplicaciones lineales de E en $\mathbb{R}$, es conocido como **dual algebraico** de E . Se acostumbra escribir $E' = L(E, \mathbb{R})$ y a los elementos de E' se les llama **funcionales lineales** sobre E .

4.18 Definición. Sean E y F dos espacios normados sobre el campo $\mathbb{R}$. El conjunto de **aplicaciones lineales continuas** de E en F , denotado por

$$CL(E, F),$$

es un subespacio vectorial de $L(E, F)$. Si $Y = X$, se escribirá $CL(X, X) = CL(X)$. El espacio vectorial $CL(E, \mathbb{R})$, consistente de todas las aplicaciones lineales continuas de E en $\mathbb{R}$, es conocido como **dual topológico** de E . Se acostumbra escribir

$$E^* = CL(E, \mathbb{R}),$$

a los elementos de E^* se les llama **funcionales lineales continuos** sobre E .

La norma de $CL(E, F)$

Es posible definir una norma sobre el espacio vectorial de aplicaciones lineales continuas como a continuación se indica.

4.27 Teorema y Definición. Sean E y F dos espacios normados sobre el campo $\mathbb{R}$. Se define la función $\|\cdot\| : CL(E, F) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\|T\| = \inf\{M \geq 0 \mid \mathcal{N}_F(T(x)) \leq M\mathcal{N}_E(x), \forall x \in E\}, \quad \forall T \in CL(E, F).$$

A $\|T\|$ se le llama la **norma** de T . $\forall T \in CL(E, F)$, se cumplen las afirmaciones siguientes.

- i. $\|T\| = \sup \left\{ \frac{\mathcal{N}_F(T(x))}{\mathcal{N}_E(x)} \mid x \in E \setminus \{0\} \right\}.$
- ii. $\|T\| = \sup\{\mathcal{N}_F(T(x)) \mid x \in U_E\}.$
- iii. $\mathcal{N}_F(Tx) \leq \|T\|\mathcal{N}_E(x), \quad \forall x \in E.$

Además, la función $\|\cdot\|$ es una norma sobre $CL(E, F)$.

Demostración. Si $T : E \rightarrow F$ es una aplicación lineal continua, entonces existe $M \geq 0$ tal que

$$(4.20) \quad \mathcal{N}_F(T(x)) \leq M\mathcal{N}_E(x), \quad \forall x \in E,$$

en virtud del Teorema 4.20, luego la función $\|\cdot\| : CL(E, F) \rightarrow \mathbb{R}$ está bien definida.

(i). Escriba

$$s(T) = \sup \left\{ \frac{\mathcal{N}_F(T(x))}{\mathcal{N}_E(x)} \mid x \in E \setminus \{0\} \right\}.$$

Se demostrará que $\|T\| = s(T)$. Sea pues $M \geq 0$ tal que se cumpla (4.20). Entonces

$$\frac{\mathcal{N}_F(T(x))}{\mathcal{N}_E(x)} \leq M, \quad \forall x \in E \setminus \{0\}.$$

Por definición de $s(T)$, se tiene $s(T) \leq M$. Dado que $s(T)$ es una cota superior para el conjunto de las $M \geq 0$ que satisfacen (4.20), se debe tener

$$s(T) \leq \inf\{M > 0 \mid \mathcal{N}_F(T(x)) \leq M\mathcal{N}_E(x), \forall x \in E\} = \|T\|.$$

Recíprocamente, por definición de $s(T)$, se tiene

$$\frac{\mathcal{N}_F(T(x))}{\mathcal{N}_E(x)} \leq s(T), \quad \forall x \in E \setminus \{0\}.$$

Luego

$$\mathcal{N}_F(T(x)) \leq s(T)\mathcal{N}_E(x), \quad \forall x \in E.$$

Así pues, $s(T) \in \{M > 0 \mid \mathcal{N}_F(T(x)) \leq M\mathcal{N}_E(x), \forall x \in E\}$, lo cual implica que

$$\|T\| = \inf\{M \geq 0 \mid \mathcal{N}_F(T(x)) \leq M\mathcal{N}_E(x), \forall x \in E\} \leq s(T).$$

Por lo tanto, $\|T\| = s(T)$.

(ii). Escriba

$$q(T) = \sup\{\mathcal{N}_F(T(x)) \mid x \in U_E\}.$$

Ya que

$$\mathcal{N}_F(T(x)) \leq \frac{\mathcal{N}_F(T(x))}{\mathcal{N}_E(x)} \leq s(T), \quad \forall x \in U_E \setminus \{0\},$$

se debe tener $q(T) \leq s(T)$. Recíprocamente, si $x \in E \setminus \{0\}$, entonces $x/\mathcal{N}_E(x) \in U_E$. Luego

$$\frac{\mathcal{N}_F(T(x))}{\mathcal{N}_E(x)} = \mathcal{N}_F\left[\frac{T(x)}{\mathcal{N}_E(x)}\right] = \mathcal{N}_F\left[T\left(\frac{x}{\mathcal{N}_E(x)}\right)\right] \leq q(T), \quad \forall x \in E \setminus \{0\}.$$

Esto prueba que

$$s(T) = \sup\left\{\frac{\mathcal{N}_F(T(x))}{\mathcal{N}_E(x)} \mid x \in E \setminus \{0\}\right\} \leq q(T).$$

Por lo tanto, $q(T) = s(T)$. Se concluye de (i) que $q(T) = \|T\|$.

(iii). Por definición de $s(T)$ y (i), se tiene

$$\frac{\mathcal{N}_F(T(x))}{\mathcal{N}_E(x)} \leq s(T) = \|T\|, \quad \forall x \in E \setminus \{0\}.$$

Luego

$$\mathcal{N}_F(T(x)) \leq \|T\|\mathcal{N}_E(x), \quad \forall x \in E.$$

Finalmente, se verifica de inmediato (Ejercicio) que $\|T\| \geq 0$, $\|\lambda T\| = |\lambda|\|T\|$ y que $\|T\| = 0$ si y sólo si $T = 0$. Además, por (ii),

$$\mathcal{N}_F[(R+T)(x)] = \mathcal{N}_F[R(x) + T(x)] \leq \mathcal{N}_F[R(x)] + \mathcal{N}_F[T(x)] \leq \|R\| + \|T\|, \quad \forall x \in U_E.$$

Luego, nuevamente por (ii),

$$\|R+T\| \leq \|R\| + \|T\|, \quad \forall R, T \in CL(E, F).$$

Esto prueba que $\|\cdot\|$ es una norma sobre $CL(E, F)$. ■

4.28 Corolario. Sean E y F dos espacios normados y $T : E \rightarrow F$ una aplicación lineal. Se tiene que T es continua si y sólo si el conjunto $T(U_E)$ es acotado en F .

La demostración se deja como ejercicio para el lector (aplique la parte (ii) del Teorema 4.27 y el Teorema 4.20).

4.29 Corolario. Sea E un espacio normado. Si $f \in E^*$, entonces

$$\|f\| = \sup f(U).$$

Basta observar que si $x \in U$, entonces $-x \in U$ y $f(-x) = -f(x)$. Ahora, usando la parte (ii) del Teorema 4.27, el lector puede completar la prueba como ejercicio.

4.19 Ejemplo. Sea T la aplicación lineal de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{N}_\infty)$ en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{N}_\infty)$ dada por

$$T(x, y) = (-2x + y, x - y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

En el Ejemplo 4.12 mostró que T es continua y que

$$\mathcal{N}_\infty(T(x, y)) \leq 3\mathcal{N}_\infty(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

luego $\|T\| \leq 3$. Se afirma que, de hecho, $\|T\| = 3$. Para probar que $\|T\| \geq 3$ es posible aplicar la parte (ii) del Teorema 4.27. La idea es buscar un vector $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\mathcal{N}_\infty((x, y)) = 1$, es decir, $(x, y) \in U_{\mathbb{R}^2}$, que satisfaga $\mathcal{N}_\infty(T(x, y)) = 3$. Por ejemplo, el vector $(-1, 1)$ claramente satisface las dos condiciones $\mathcal{N}_\infty(-1, 1) = 1$ y

$$\mathcal{N}_\infty(T(-1, 1)) = \max\{|(-2)(-1) + 1|, |-1 - 1|\} = 3.$$

Al aplicar entonces dicho teorema se obtiene

$$3 = \mathcal{N}_\infty(T(-1, 1)) \leq \sup\{\mathcal{N}_\infty(T(x, y)) \mid (x, y) \in U_{\mathbb{R}^2}\} = \|T\|,$$

de donde, $\|T\| \geq 3$. Por lo tanto $\|T\| = 3$. ◀

4.20 Ejemplo. Considere el funcional lineal $f \in \phi'_0$ dado por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n), \quad \forall x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \phi_0.$$

En el Ejemplo 4.13 se probó que $f \in \phi_0^*$ si se dota a ϕ_0 de la norma $\mathcal{N}_1$ de ℓ_1 , y que

$$|f(x)| \leq \mathcal{N}_1(x), \quad \forall x \in \phi_0,$$

de donde $\|f\| \leq 1$. Se afirma que $\|f\| = 1$. En efecto, para probar que $\|f\| \geq 1$ se procede de

manera similar al ejemplo anterior. El vector $e_1 = \{e_1(n)\}_{n=1}^{\infty}$, definido anteriormente como $e_1(1) = 1$ y $e_1(n) = 0$, $\forall n \geq 2$, satisface

$$\mathcal{N}_1(e_1) = \sum_{n=1}^{\infty} |e_1(n)| = 1,$$

luego $e_1 \in U_{\phi_0}$, y $f(e_1) = 1$. Aplicando la parte (ii) del Teorema 4.27 se obtiene

$$1 = f(e_1) \leq \sup\{|f(x)| \mid x \in U_{\phi_0}\} = \|f\|.$$

Por lo tanto, $\|f\| = 1$. Esto prueba la afirmación.

En dicho Ejemplo 4.13 también se probó que f no es continuo sobre $(\phi_0, \mathcal{N}_{\infty})$. Alternativamente, se podría llegar a esta misma conclusión aplicando el Corolario 4.28. Para esto, bastaría probar que el conjunto $f(U_{\phi_0})$ no es acotado en $\mathbb{R}$. Considere los vectores $x_m = \{x_m(n)\}_{n=1}^{\infty}$ en ϕ_0 definidos como $x_m(n) = 1$ si $n = 1, \dots, m$, y $x_m(n) = 0$ si $n > m$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Se tiene,

$$\mathcal{N}_{\infty}(x_m) = \sup\{|x_m(n)| \mid n \in \mathbb{N}\} = 1,$$

luego $x_m \in U_{\phi_0}$, $\forall m \in \mathbb{N}$, y

$$f(x_m) = \sum_{n=1}^{\infty} x_m(n) = m, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Esto prueba que $f(U_{\phi_0})$ no es acotado en $\mathbb{R}$. ◀

4.21 Ejemplo. Sea $\phi : \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ el funcional lineal

$$\phi(f) = \int_a^b f(t) dt, \quad \forall f \in \mathcal{C}([a, b]).$$

i. Dotando a $\mathcal{C}([a, b])$ de la norma uniforme $\mathcal{N}_{\infty}$, en el Ejemplo 4.14 se demostró que $\phi \in \mathcal{C}([a, b])^*$ y que

$$|\phi(f)| \leq (b - a)\mathcal{N}_{\infty}(f), \quad \forall f \in \mathcal{C}([a, b]),$$

luego $\|\phi\| \leq b - a$. Se afirma que, de hecho, $\|\phi\| = b - a$. En efecto, para probar la desigualdad $\|\phi\| \geq b - a$ se procede como en ejemplos anteriores. La función constante de valor uno $\underline{1} \in U_{\mathcal{C}([a, b])}$, pues

$$\mathcal{N}_{\infty}(\underline{1}) = \sup_{a \leq t \leq b} |\underline{1}(t)| = 1,$$

y satisface

$$\phi(\underline{1}) = \int_a^b \underline{1}(t) dt = \int_a^b dt = b - a.$$

Por la parte (ii) del Teorema 4.27 se debe tener

$$b - a = \phi(\underline{1}) \leq \sup\{|\phi(f)| \mid f \in \mathcal{C}([a, b])\} = \|\phi\|.$$

Esto prueba la afirmación.

ii. Si ahora se provee a $\mathcal{C}([a, b])$ de la norma $\mathcal{N}_1$, en dicho Ejemplo 4.14 se demostró también que $\phi \in \mathcal{C}([a, b])^*$ y que

$$|\phi(f)| \leq \mathcal{N}_1(f), \quad \forall f \in \mathcal{C}([a, b]),$$

de donde $\|\phi\| \leq 1$. Se afirma que, de hecho, $\|\phi\| = 1$. En efecto, para probar la desigualdad $\|\phi\| \geq 1$ observe que la función constante $\underline{1/(b-a)} \in U_{\mathcal{C}([a, b])}$, pues

$$\mathcal{N}_1(\underline{1/(b-a)}) = \int_a^b |\underline{1/(b-a)}(t)| dt = \frac{b-a}{b-a} = 1,$$

y satisface

$$\phi\left(\underline{\frac{1}{b-a}}\right) = \int_a^b \frac{1}{b-a}(t) dt = \int_a^b \frac{1}{b-a} dt = 1.$$

Por la parte (ii) del Teorema 4.27 se debe tener

$$1 = \phi\left(\underline{\frac{1}{b-a}}\right) \leq \sup\{|\phi(f)| \mid f \in \mathcal{C}([a, b])\} = \|\phi\|.$$

Esto prueba la afirmación.

Por cierto, se puede demostrar que la función identidad

$$I : (\mathcal{C}([a, b]), \mathcal{N}_\infty) \rightarrow (\mathcal{C}([a, b]), \mathcal{N}_1)$$

es continua y $\|I\| = b - a$, pero que $I : (\mathcal{C}([a, b]), \mathcal{N}_1) \rightarrow (\mathcal{C}([a, b]), \mathcal{N}_\infty)$ no es continua (Ejercicio). ◀

4.22 Ejemplo. Dada una sucesión de números reales $x = \{x(n)\}_{n=1}^\infty$, se define la sucesión $T(x) = \{T(x)(n)\}_{n=1}^\infty$ como $T(x)(1) = 0$ y $T(x)(n+1) = x(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, es decir, si

$$x = (x(1), x(2), x(3), \dots),$$

entonces

$$T(x) = (0, x(1), x(2), x(3), \dots).$$

La función $T : \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty$, $x \mapsto T(x)$, es claramente una aplicación lineal, llamada el **operador transferencia** sobre ℓ_∞ . Se verifica de inmediato que T es una isometría lineal (es decir, una aplicación lineal que preserva normas de vectores y, por tanto, distancias entre parejas de vectores) del espacio normado $(\ell_\infty, \mathcal{N}_\infty)$ sobre su subespacio normado propio

$$\{y = \{y(n)\}_{n=1}^\infty \in \ell_\infty \mid y(1) = 0\}.$$

Por ser T una isometría lineal, se debe tener $T \in CL(\ell_\infty)$ y $\|T\| = 1$ (Ejercicio).

Ahora bien, dada una sucesión de números reales $y = \{y(n)\}_{n=1}^\infty$ se define la sucesión $S(y) = \{S(y)(n)\}_{n=1}^\infty$ como $S(y)(n) = y(n+1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, es decir, si

$$y = (y(1), y(2), y(3), y(4), \dots),$$

entonces

$$S(y) = (y(2), y(3), y(4), \dots).$$

La función $S : \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty$, $y \mapsto S(y)$, también es una aplicación lineal, llamada el **operador retrotransferencia** sobre ℓ_∞ . Se afirma que $S \in CL(\ell_\infty)$ y $\|S\| = 1$. En efecto, es claro que

$$\mathcal{N}_\infty(S(y)) \leq 1 \cdot \mathcal{N}_\infty(y), \quad \forall y \in \ell_\infty.$$

Luego, S es continua y $\|S\| \leq 1$. Además, si $e_m = \{e_m(n)\}_{n=1}^\infty$, donde

$$e_m(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{si } n \neq m, \end{cases}$$

$\forall m \in \mathbb{N}$, entonces $e_2 \in U_{\ell_\infty}$ y $S(e_2) = e_1$, de donde,

$$1 = \mathcal{N}_\infty(e_1) = \mathcal{N}_\infty(S(e_2)) \leq \sup\{\mathcal{N}_\infty(S(x)) \mid x \in U_{\ell_\infty}\} = \|S\|,$$

por la parte (ii) del Teorema 4.27. Esto prueba la afirmación.

Observe que $S \circ T = I$ pero que $T \circ S \neq I$, donde I es la función identidad en ℓ_∞ (Ejercicio). ◀

4.23 Ejemplo. Sea $1 < p < \infty$, luego también $1 < p^* < \infty$ (recuerde que $1/p + 1/p^* = 1$).

Fije $c = \{c(n)\}_{n=1}^\infty \in \ell_{p^*}$ y defina $T : \ell_p \rightarrow \ell_1$ como

$$T(x) = cx = \{c(n)x(n)\}_{n=1}^\infty, \quad \forall x = \{x(n)\}_{n=1}^\infty \in \ell_p.$$

Por la desigualdad de Hölder, $cx = \{c(n)x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$ y

$$(4.21) \quad \mathcal{N}_1(T(x)) = \mathcal{N}_1(cx) = \sum_{n=1}^{\infty} |c(n)x(n)| \leq \mathcal{N}_{p^*}(c)\mathcal{N}_p(x), \quad \forall x \in \ell_p.$$

Esto prueba que T está bien definida. Se verifica de inmediato que T es una aplicación lineal (Ejercicio). La desigualdad (4.21) implica entonces que T es continua y que $\|T\| \leq \mathcal{N}_{p^*}(c)$.

Se afirma que, de hecho, $\|T\| = \mathcal{N}_{p^*}(c)$. En efecto, defina la función signo $\text{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0, \\ -1 & \text{si } t < 0, \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

y note que $\text{sgn}(t)t = |t|$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Procediendo igual que en los dos ejemplos anteriores, el vector

$$x_0 = \frac{\text{sgn}(c)|c|^{p^*/p}}{\mathcal{N}_{p^*}^{p^*/p}(c)} = \left\{ \frac{\text{sgn}(c(n))|c(n)|^{p^*/p}}{\mathcal{N}_{p^*}^{p^*/p}(c)} \right\}_{n=1}^{\infty} \in U_{\ell_p},$$

donde $\text{sgn}(c)$ denota la sucesión $\{\text{sgn}(c(n))\}_{n=1}^{\infty}$ y $|c|^\alpha$ denota a la sucesión $\{|c(n)|^\alpha\}_{n=1}^{\infty}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, pues

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\text{sgn}(c(n))|c(n)|^{p^*/p}}{\mathcal{N}_{p^*}^{p^*/p}(c)} \right|^p \right]^{1/p} = \frac{1}{\mathcal{N}_{p^*}^{p^*/p}(c)} \left[\sum_{n=1}^{\infty} |c(n)|^{p^*} \right]^{1/p} = \frac{\mathcal{N}_{p^*}^{p^*/p}(c)}{\mathcal{N}_{p^*}^{p^*/p}(c)} = 1,$$

satisface

$$T(x_0) = \left\{ \frac{c(n) \text{sgn}(c(n))|c(n)|^{p^*/p}}{\mathcal{N}_{p^*}^{p^*/p}(c)} \right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{|c(n)|^{1+(p^*/p)}}{\mathcal{N}_{p^*}^{p^*/p}(c)} \right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \frac{|c(n)|^{p^*}}{\mathcal{N}_{p^*}^{p^*/p}(c)} \right\}_{n=1}^{\infty},$$

porque

$$1 + \frac{p^*}{p} = p^* \left[\frac{1}{p^*} + \frac{1}{p} \right] = p^*,$$

de donde,

$$(4.22) \quad \mathcal{N}_1(T(x_0)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c(n)|^{p^*}}{\mathcal{N}_{p^*}^{p^*/p}(c)} = \frac{1}{\mathcal{N}_{p^*}^{p^*/p}(c)} \left[\sum_{n=1}^{\infty} |c(n)|^{p^*} \right] \\ = \frac{\mathcal{N}_{p^*}^{p^*}(c)}{\mathcal{N}_{p^*}^{p^*/p}(c)} = \mathcal{N}_{p^*}^{p^*-(p^*/p)}(c) = \mathcal{N}_{p^*}(c),$$

ya que

$$p^* - \frac{p^*}{p} = p^* \left[1 - \frac{1}{p} \right] = \frac{p^*}{p^*} = 1.$$

Aplicando ahora (4.22) y la parte (ii) del Teorema 4.27, se obtiene

$$\mathcal{N}_{p^*}(c) = \mathcal{N}_1(T(x_0)) \leq \sup\{\mathcal{N}_1(T(x)) \mid x \in U_{\ell_p}\} = \|T\|.$$

Por lo tanto, $\|T\| = \mathcal{N}_{p^*}(c)$. Esto prueba la afirmación. ◀

4.24 Ejemplo. Sea $f : \ell_1 \rightarrow \mathbb{R}$ la función

$$(4.23) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n+1} x(n), \quad \forall x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_1.$$

La función f está bien definida ya que

$$(4.24) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{2n-1}{n+1} x(n) \right| \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| < 2\mathcal{N}_1(x), \quad \forall x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_1,$$

es decir, la serie en (4.23) es absolutamente convergente, luego convergente. Claramente, f es una aplicación lineal. Además,

$$|f(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{2n-1}{n+1} x(n) \right|, \quad \forall x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_1,$$

luego, por (4.24), se tiene

$$|f(x)| \leq 2\mathcal{N}_1(x), \quad \forall x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_1.$$

Esto prueba que f es continua y $\|f\| \leq 2$.

Se afirma que, de hecho, $\|f\| = 2$. En efecto, para probar la desigualdad $\|f\| \geq 2$, a diferencia de los ejemplos anteriores, no va a ser posible hallar ningún vector $x \in U_{\ell_1}$ tal que $\mathcal{N}_1(f(x)) = 2$. Alternativamente se busca una sucesión $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ de puntos en U_{ℓ_1} tal que $|f(x_m)|$ se aproxime a 2 cuando $m \rightarrow \infty$. La sucesión $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$, donde $e_m = \{e_m(n)\}_{n=1}^{\infty}$ está dada por

$$e_m(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{si } n \neq m, \end{cases}$$

claramente está contenida en U_{ℓ_1} y satisface

$$|f(e_m)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n+1} e_m(n) \right| = \left| \frac{2m-1}{m+1} \right| = \left| 2 - \frac{3}{m+1} \right|, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Por la parte (ii) del Teorema 4.27, se debe tener

$$|f(e_m)| = \left| 2 - \frac{3}{m+1} \right| \leq \sup\{|f(x)| \mid x \in U_{\ell_1}\} \leq \|f\|, \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

lo cual implica

$$\|f\| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| 2 - \frac{3}{m+1} \right| = 2.$$

Por lo tanto, $\|f\| = 2$. Esto prueba la afirmación. ◀

4.30 Proposición. *Sea E un espacio normado y sea $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal. Se tiene que f es continuo si y sólo si $\ker f$ es un subespacio cerrado de E .*

Demostración. Si f es continuo, entonces

$$\ker f = f^{-1}(\{0\})$$

debe ser un subespacio cerrado de E , por ser $\{0\}$ un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$.

Suponga ahora que f no es continuo. Se debe probar que $\ker f$ no es un subespacio cerrado de E . Bastará probar que $\ker f$ es un subespacio denso de E . Esto es porque si ya se tiene que $\ker f$ es denso en E y $\ker f$ fuese además cerrado, se tendría $\ker f = E$, es decir, f sería constante de valor cero y, por lo tanto, continua. Contradicción.

Se afirma pues que $\ker f$ es un subespacio denso de E . En efecto, fije $x \in E$ y sea $\varepsilon > 0$. Como f no es continuo, entonces $f(U_E)$ debe ser un conjunto no acotado en $\mathbb{R}$ (vea el Corolario 4.28). El conjunto $f(\varepsilon U_E)$ tampoco debe ser acotado, por ser f lineal. Existe pues $y \in \varepsilon U_E$ tal que $|f(y)| > |f(x)|$. Entonces

$$(4.25) \quad \|y\| \leq \varepsilon \quad \text{y} \quad \left| \frac{f(x)}{f(y)} \right| < 1.$$

Observe que

$$x - \frac{f(x)}{f(y)} y \in \ker f,$$

pues

$$f \left(x - \frac{f(x)}{f(y)} y \right) = f(x) - \frac{f(x)}{f(y)} f(y) = 0,$$

y

$$\left\| x - \left[x - \frac{f(x)}{f(y)} y \right] \right\| = \left| \frac{f(x)}{f(y)} \right| \|y\| < \|y\| \leq \varepsilon,$$

por (4.25). Entonces $B(x, \varepsilon) \cap \ker f \neq \emptyset$. Esto prueba la afirmación. ■

4.31 Proposición. *Si $S \in CL(E, F)$ y $T \in CL(F, G)$, entonces $T \circ S \in CL(E, G)$ y $\|T \circ S\| \leq \|T\| \|S\|$.*

Demostración. Se sabe que $T \circ S \in L(E, G)$. Puesto que

$$\mathcal{N}_G(T(S(x))) \leq \|T\| \mathcal{N}_F(S(x)) \leq \|T\| \|S\| \mathcal{N}_E(x), \quad \forall x \in E,$$

$T \circ S \in CL(E, G)$ y $\|T \circ S\| \leq \|T\| \|S\|$, por definición de norma de operadores lineales. ■

Como consecuencia de este resultado se tiene que el espacio normado $CL(X)$ es lo que se llama una “álgebra normada con identidad”, donde el “producto” está definido como la composición de funciones y el elemento “uno”, como la función identidad de E .

4.32 Corolario. Si $T \in CL(E)$, entonces $\|T^n\| \leq \|T\|^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (donde $T^1 = T$ y $T^{n+1} = T \circ T^n = T^n \circ T$).

Completez de $CL(E, F)$

Sean E y F dos espacios normados. En principio, una sucesión $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ en $CL(E, F)$ puede converger a una función $T : E \rightarrow F$ de dos modos distintos: puntualmente en E , lo cual significa que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}_F(T_n(x) - T(x)) = 0, \quad \forall x \in E,$$

es decir, para cada $x \in E$ la sucesión $\{T_n(x)\}_{n=1}^\infty$ converge a $T(x)$ en el espacio normado F ; o si $T \in CL(E, F)$, en el espacio normado $CL(E, F)$ (o con respecto a la norma de $CL(E, F)$), es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n - T\| = 0.$$

Es claro que si una sucesión $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ en $CL(E, F)$ converge puntualmente en E a alguna función $T : E \rightarrow F$, entonces T debe ser lineal, pues, $\forall x, x' \in E$ y $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\begin{aligned} T(x + \lambda x') &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x + \lambda x') = \lim_{n \rightarrow \infty} [T_n(x) + \lambda T_n(x')] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) + \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x') = T(x) + \lambda T(x'); \end{aligned}$$

aunque T no necesariamente debe ser continua, como lo muestra el próximo ejemplo. En particular, de esto se seguirá (vea el Lema 4.33) que la convergencia puntual de una sucesión en $CL(E, F)$ no necesariamente implica la convergencia con respecto a la norma de $CL(E, F)$.

4.25 Ejemplo. Considere el espacio normado $(\phi_0, \mathcal{N}_\infty)$ de todas las sucesiones de números reales eventualmente constantes de valor cero provisto de la norma uniforme. Para cada

$n \in \mathbb{N}$, defina $f_n : \phi_0 \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n x(k), \quad \forall x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \phi_0.$$

Se verifica de inmediato (Ejercicio) que $f_n \in \phi_0^*$ y que $\|f_n\| = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Aunque $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente en ϕ_0 al funcional lineal $f \in \phi_0'$ del Ejemplo 4.20, es decir,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad \forall x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \phi_0,$$

se sabe que f no es continuo (vea el Ejemplo 4.20). ◀

Recuerde que una sucesión $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $CL(E, F)$ es **acotada** si existe $M \geq 0$ tal que

$$\|T_n\| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

es decir, si la sucesión $\{\|T_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada en $\mathbb{R}$. Se tiene el resultado siguiente.

4.33 Lema. Sean E y F dos espacios normados. Si $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada en $CL(E, F)$ que converge puntualmente en E a alguna función $T : E \rightarrow F$, entonces $T \in CL(E, F)$.

Demostración. Ya se demostró más arriba que $T \in L(E, F)$. Sea $M \geq 0$ tal que $\|T_n\| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Como

$$T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x), \quad \forall x \in E,$$

y la función $\mathcal{N}_F : Y \rightarrow \mathbb{R}$ es continua (vea la Proposición 4.3), se tiene

$$\mathcal{N}_F(T(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}_F(T_n(x)) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{N}_F(T_n(x)) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} [\|T_n\| \mathcal{N}_E(x)] \leq M \mathcal{N}_E(x), \quad \forall x \in E.$$

Por lo tanto, la aplicación lineal T es continua. ■

4.34 Teorema. Sean E y F dos espacios normados. Si F es un espacio de Banach, entonces el espacio $(CL(E, F), \|\cdot\|)$ de aplicaciones lineales continuas de E en F provisto de la norma de operadores, es un espacio de Banach.

Demostración. Sea $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $CL(E, F)$. Ya que toda sucesión de Cauchy en cualquier espacio métrico es acotada, entonces $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada en $CL(E, F)$. Se verá ahora que $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente en E a alguna función $T : E \rightarrow F$. Fije $x \in E$. Puesto que

$$\mathcal{N}_F(T_p(x) - T_q(x)) \leq \|T_p - T_q\| \mathcal{N}_E(x), \quad \forall p, q \in \mathbb{N},$$

y $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ es de Cauchy en $CL(E, F)$, entonces $\{T_n(x)\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en F . Como F completo, existe $T(x) \in F$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = T(x).$$

Siendo $x \in E$ arbitrario, la relación $x \mapsto T(x)$ define una función $T : E \rightarrow F$ que es el límite puntual en E de la sucesión $\{T_n\}_{n=1}^\infty$.

Se afirma que, de hecho, $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ converge a T con respecto a la norma de $CL(E, F)$. De acuerdo al Lema 4.33, $T \in CL(E, F)$. Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$(4.26) \quad \|T_p - T_q\| \leq \varepsilon, \quad \forall p, q \geq N.$$

Necesariamente,

$$(4.27) \quad \mathcal{N}_F(T_p(x) - T_q(x)) \leq \varepsilon, \quad \forall p, q \geq N \quad \text{y} \quad \forall x \in U_E,$$

por (4.26) y por la parte (ii) del Teorema 4.27, es decir, ε es una cota superior del conjunto de valores reales

$$\{\mathcal{N}_F(T_p(x) - T_q(x)) \mid p, q \geq N, x \in U_E\}.$$

Luego, para cada $p \geq N$ y $x \in U_E$, se sigue de esto y de la continuidad de la función norma (vea la Proposición 4.3) que

$$\mathcal{N}_F(T_p(x) - T(x)) = \lim_{q \rightarrow \infty} \mathcal{N}_F(T_p(x) - T_q(x)) \leq \varepsilon,$$

o sea, que ε es una cota superior del conjunto de valores en $\mathbb{R}$

$$\{\mathcal{N}_F(T_p(x) - T(x)) \mid x \in U_E, p \geq N\}.$$

En particular,

$$\|T_p - T\| = \sup_{x \in U_E} \mathcal{N}_F(T_p(x) - T(x)) \leq \varepsilon, \quad \forall p \geq N.$$

Esto implica que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|T_p - T\| = 0,$$

probando la afirmación. Por lo tanto, $CL(E, F)$ es completo. ■

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es el resultado siguiente.

4.35 Corolario. Si E es un espacio normado, entonces su espacio dual $(E^*, \|\cdot\|)$ es siempre

un espacio de Banach.

Para la demostración, basta observar que $E^* = CL(E, \mathbb{R})$ y que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ es completo.

4.6. Isomorfismos

Dos espacios normados serán isomorfos si tienen estructuras topológicas y algebraicas similares, mientras que dos espacios normados serán linealmente isométricos si son prácticamente indistinguibles.

4.26 Definición. Sean E y F dos espacio normados. Un **isomorfismo** de E sobre F es un homeomorfismo T de E sobre F que es una aplicación lineal (luego también T^{-1} es lineal). Si existe un isomorfismo de E sobre F , se dice que E y F son **isomorfos** y se escribe $E \cong F$. Si T es, de hecho, una isometría lineal de E sobre F , se dice que E y F son **linealmente isométricos** y se escribe $E \equiv F$.

Se tiene la siguiente caracterización de isometría lineal (Ejercicio).

4.36 Proposición. Sea T una aplicación lineal de un espacio normado E en un espacio normado F . Se tiene que

$$d_F(T(x), T(x')) = d_E(x, x'), \quad \forall x, x' \in E,$$

si y sólo si

$$\mathcal{N}_F(T(x)) = \mathcal{N}_E(x), \quad \forall x \in E,$$

es decir, una aplicación lineal preserva distancias si y sólo si preserva normas.

Puesto que toda aplicación lineal continua es uniformemente continua (vea el Corolario 4.21), entonces transforma sucesiones de Cauchy sobre sucesiones de Cauchy y sucesiones convergentes sobre sucesiones convergentes. De estas observaciones se sigue sin más el resultado siguiente.

4.37 Teorema. Si dos espacios normados E y F son isomorfos, entonces E es de Banach si y sólo si F es de Banach.

4.27 Ejemplo. Se tiene que

$$(\mathcal{C}([0, 1]), \mathcal{N}_\infty) \not\cong (\mathcal{C}([0, 1]), \mathcal{N}_1),$$

pues el primero es de Banach mientras que el segundo no. ◀

Un caso particular del teorema anterior es el siguiente resultado.

4.38 Corolario. Si $\mathcal{N}$ y $\|\cdot\|$ son dos normas equivalentes sobre un mismo espacio vectorial E , entonces $(E, \mathcal{N})$ es de Banach si y sólo si $(E, \|\cdot\|)$ es de Banach.

Demostración. Com la función identidad I es un homeomorfismo de $(E, \mathcal{N})$ sobre $(E, \|\cdot\|)$, por la Proposición 2.37, que además es lineal, entonces dichos espacios normados son isomorfos. La conclusión se sigue pues directamente del Teorema 4.37. ■

Una caracterización de los isomorfismos se da en el resultado siguiente.

4.39 Teorema. Sea T una aplicación lineal de un espacio normado E sobre un espacio normado F . Se tiene que T es un isomorfismo de E sobre F si y sólo si existen constantes $\alpha, \beta > 0$ tales que

$$(4.28) \quad \alpha \mathcal{N}_E(x) \leq \mathcal{N}_F(T(x)) \leq \beta \mathcal{N}_E(x), \quad \forall x \in E.$$

Demostración. (i). Suponga que T es un isomorfismo de E sobre F . Entonces T y T^{-1} son aplicaciones lineales continuas. La parte (iii) del Teorema 4.27 implica entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_E(x) = \mathcal{N}_E(T^{-1}(T(x))) &\leq \|T^{-1}\| \mathcal{N}_F(T(x)) \\ &\text{y} \quad \mathcal{N}_F(T(x)) \leq \|T\| \mathcal{N}_E(x), \quad \forall x \in E. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{\|T^{-1}\|} \mathcal{N}_E(x) \leq \mathcal{N}_F(T(x)) \leq \|T\| \mathcal{N}_E(x), \quad \forall x \in E.$$

(ii). Suponga ahora que se cumple (4.28). Entonces T es continua, porque

$$\mathcal{N}_F(T(x)) \leq \beta \mathcal{N}_E(x), \quad \forall x \in E.$$

La condición

$$\alpha \mathcal{N}_E(x) \leq \mathcal{N}_F(T(x)), \quad \forall x \in E,$$

implica que T es inyectiva (¿Por qué?), luego T es, de hecho, biyectiva, y, por tanto, dicha condición es equivalente a la condición

$$\alpha \mathcal{N}_E(T^{-1}(y)) \leq \mathcal{N}_F(y), \quad \forall y \in F,$$

es decir,

$$\mathcal{N}_E(T^{-1}(y)) \leq \frac{1}{\alpha} \mathcal{N}_F(y), \quad \forall y \in F.$$

Así pues, T^{-1} también es continua. Por lo tanto, T es un isomorfismo de E sobre F . ■

Se concluye de inmediato del teorema anterior el resultado siguiente (Ejercicio).

4.40 Corolario. *Si T es un isomorfismo de un espacio normado sobre otro espacio normado, entonces T y T^{-1} transforman conjuntos cerrados sobre conjuntos cerrados, conjuntos abiertos sobre conjuntos abiertos y conjuntos acotados sobre conjuntos acotados.*

Espacio de sucesiones $\mathfrak{c}$

Se denota por $\mathfrak{c}$ el conjunto de todas las sucesiones de números reales que son convergentes en $\mathbb{R}$, es decir, $x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{c}$ si y sólo si existe $l \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = l.$$

El conjunto $\mathfrak{c}$ es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$ con la adición y el producto por escalares usuales de sucesiones, se llama el **espacio de sucesiones convergentes**. Es claro que $\mathfrak{c}_0$ es un subespacio propio de $\mathfrak{c}$ y que $\mathfrak{c}$ es, a su vez, un subespacio de ℓ_{∞} (pues toda sucesión convergente en $\mathbb{R}$ es acotada).

4.41 Proposición. *$(\mathfrak{c}, \mathcal{N}_{\infty})$ es isomorfo a su subespacio propio $(\mathfrak{c}_0, \mathcal{N}_{\infty})$. En particular, $(\mathfrak{c}, \mathcal{N}_{\infty})$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Para cada $x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{c}$, sea

$$l(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x(n).$$

Aunque la función

$$(x(1), x(2), \dots) \mapsto (x(1) - l(x), x(2) - l(x), \dots)$$

establece una correspondencia natural entre $\mathfrak{c}$ y $\mathfrak{c}_0$, ésta sería de poca utilidad por no ser inyectiva. Sin embargo, se verá que la función

$$x = (x(1), x(2), \dots) \mapsto T(x) = (l(x), x(1) - l(x), x(2) - l(x), \dots),$$

esto es, la función $T : \mathfrak{c} \rightarrow \mathfrak{c}_0$ que a cada $x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{c}$ le asigna la sucesión $T(x) = \{T(x)(n)\}_{n=1}^{\infty}$ definida como $T(x)(1) = l(x)$ y $T(x)(n+1) = x(n) - l(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, sí es un isomorfismo de $\mathfrak{c}$ sobre $\mathfrak{c}_0$.

Es claro que T es una aplicación lineal de $\mathfrak{c}$ en $\mathfrak{c}_0$. Para probar que T es biyectiva basta mostrar que existe su función inversa. Se verifica de inmediato (Ejercicio) que la función $S : \mathfrak{c}_0 \rightarrow \mathfrak{c}$ dada por

$$y = (y(1), y(2), y(3), \dots) \mapsto S(y) = (y(2) + y(1), y(3) + y(1), \dots),$$

esto es, la función que a cada $y = \{y(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{c}_0$ le asigna la sucesión $S(y) = \{S(y)(n)\}_{n=1}^{\infty}$ definida como $S(y)(n) = y(n+1) + y(1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, satisface $S \circ T = I$ y $T \circ S = I$, donde I es la correspondiente función identidad. Así pues, $T^{-1} = S$.

La aplicación lineal T es continua, porque si $x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{c}$, entonces

$$|x(n)| \leq \mathcal{N}_{\infty}(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \implies \quad |l(x)| \leq \mathcal{N}_{\infty}(x).$$

Luego

$$|T(x)(1)| = |l(x)| \leq \mathcal{N}_{\infty}(x) \quad \text{y} \quad |T(x)(n+1)| = |x(n) - l(x)| \leq 2\mathcal{N}_{\infty}(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se concluye que

$$\mathcal{N}_{\infty}(T(x)) \leq 2\mathcal{N}_{\infty}(x), \quad \forall x \in \mathfrak{c}.$$

La función inversa T^{-1} también es continua, por ser lineal y porque

$$|T^{-1}(y)(n)| = |S(y)(n)| = |y(n+1) + y(1)| \leq 2\mathcal{N}_{\infty}(y), \quad \forall y \in \mathfrak{c}_0.$$

Puesto que $(\mathfrak{c}_0, \mathcal{N}_{\infty})$ es un espacio de Banach, se sigue del Teorema 4.37 que $(\mathfrak{c}, \mathcal{N}_{\infty})$ es también un espacio de Banach. ■

4.7. Caracterización de la completez por series

4.28 Definición. Se dice que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ en un espacio normado $(E, \mathcal{N})$ es **absolutamente convergente** si la serie de términos no negativos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{N}(x_n)$$

es convergente en $\mathbb{R}$.

Decir que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{N}(x_n)$ converge equivale a decir que su suma es finita, o sea,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{N}(x_n) < \infty,$$

por tratarse de una serie de términos no negativos.

Una serie en un espacio normado puede, en general, ser convergente sin que sea absolutamente convergente, por ejemplo, en $\mathbb{R}$ con la distancia usual, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

es convergente pero no es absolutamente convergente. Y viceversa, una serie puede converger absolutamente en un espacio normado sin ser convergente, por ejemplo, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

converge absolutamente en el subespacio normado $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$ pero no converge en $\mathbb{Q}$ (¿Por qué?). Sin embargo, se tiene el resultado siguiente.

4.42 Teorema. *Para que un espacio normado $(E, \mathcal{N})$ sea de Banach es necesario y suficiente que toda serie en E que sea absolutamente convergente, converja a algún punto de E .*

Demostración. Necesidad. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie absolutamente convergente en E . Considere las sucesiones de sumas parciales

$$s_n = \sum_{k=1}^n x_k \quad \text{y} \quad t_n = \sum_{k=1}^n \mathcal{N}(x_k), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

de las series $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{N}(x_n)$, respectivamente. Por hipótesis, la sucesión creciente no negativa $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en $\mathbb{R}$, luego es de Cauchy. Sea pues $\varepsilon > 0$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$(4.29) \quad \sum_{k=p+1}^q \mathcal{N}(x_k) = |t_q - t_p| \leq \varepsilon, \quad \forall q > p \geq N.$$

Puesto que

$$\mathcal{N}(s_q - s_p) = \mathcal{N}\left(\sum_{k=p+1}^q x_k\right) \leq \sum_{k=p+1}^q \mathcal{N}(x_k), \quad \forall q > p,$$

se debe cumplir

$$\mathcal{N}(s_q - s_p) \leq \varepsilon, \quad \forall q > p \geq N,$$

por (4.29). Esto prueba que la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es de Cauchy en E . Siendo E completo, existe $x \in E$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x,$$

es decir, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge a $x \in E$.

Suficiencia. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en E . Para probar que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en E bastará mostrar que alguna de sus subsucesiones es convergente (por ser de Cauchy). Se construirá pues una serie en E que sea absolutamente convergente y tal que la sucesión de sumas parciales de dicha serie coincida con alguna subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Para $\varepsilon = 1/2$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathcal{N}(x_m - x_n) \leq \frac{1}{2}, \quad \forall m \geq n \geq N_1.$$

Sea $\alpha(1) = N_1$. Entonces

$$\mathcal{N}(x_m - x_{\alpha(1)}) \leq \frac{1}{2}, \quad \forall m \geq \alpha(1).$$

Para $\varepsilon = 1/2^2$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathcal{N}(x_m - x_n) \leq \frac{1}{2^2}, \quad \forall m \geq n \geq N_2.$$

Sea $\alpha(2) > \max\{N_2, \alpha(1)\}$. Entonces $\alpha(2) > \alpha(1)$ y

$$\mathcal{N}(x_{\alpha(2)} - x_{\alpha(1)}) \leq \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \mathcal{N}(x_m - x_{\alpha(2)}) \leq \frac{1}{2^2}, \quad \forall m \geq \alpha(2).$$

Suponga definido $\alpha(k) \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha(k) > \alpha(k-1)$,

$$(4.30) \quad \mathcal{N}(x_{\alpha(k)} - x_{\alpha(k-1)}) \leq \frac{1}{2^{k-1}} \quad \text{y} \quad \mathcal{N}(x_m - x_{\alpha(k)}) \leq \frac{1}{2^k}, \quad \forall m \geq \alpha(k).$$

Para $\varepsilon = 1/2^{k+1}$, existe $N_{k+1} \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathcal{N}(x_m - x_n) \leq \frac{1}{2^{k+1}}, \quad \forall m \geq n \geq N_{k+1}.$$

Sea $\alpha(k+1) > \max\{N_{k+1}, \alpha(k)\}$. Entonces $\alpha(k+1) > \alpha(k)$ y, por (4.30), se tiene

$$\mathcal{N}(x_{\alpha(k+1)} - x_{\alpha(k)}) \leq \frac{1}{2^k} \quad \text{y} \quad \mathcal{N}(x_m - x_{\alpha(k+1)}) \leq \frac{1}{2^{k+1}}, \quad \forall m \geq \alpha(k+1).$$

Inductivamente se ha construido una sucesión $\{\alpha(n)\}_{n=1}^{\infty}$ estrictamente creciente de números naturales, luego $\{x_{\alpha(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ es una auténtica subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$(4.31) \quad \mathcal{N}(x_{\alpha(n)} - x_{\alpha(n-1)}) \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \forall n \geq 2.$$

Considere la serie “telescópica”

$$x_{\alpha(1)} + \sum_{n=2}^{\infty} (x_{\alpha(n)} - x_{\alpha(n-1)})$$

en E . Por (4.31), se tiene

$$\mathcal{N}(x_{\alpha(1)}) + \sum_{n=2}^{\infty} \mathcal{N}(x_{\alpha(n)} - x_{\alpha(n-1)}) \leq \mathcal{N}(x_{\alpha(1)}) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} < \infty.$$

Esto significa que la serie telescópica es absolutamente convergente en E . Por hipótesis, dicha serie debe converger a algún punto $x \in E$, es decir, la sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ de sumas parciales de tal serie, es decir,

$$s_n = x_{\alpha(1)} + \sum_{k=2}^n (x_{\alpha(k)} - x_{\alpha(k-1)}) = x_{\alpha(n)}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

converge a x . Así pues, la subsucesión $\{x_{\alpha(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x en E . Por ser $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de Cauchy, se concluye que la sucesión misma $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x en E . ■

4.8. Espacios normados de dimensión finita

Se analizan varios resultados generales relacionados con los espacios normados de dimensión finita, entre otros, la continuidad de transformaciones lineales, la propiedad de completez y el teorema de Riesz, donde este último resultado proporciona una caracterización de la propiedad puramente algebraica de dimensión en términos de la propiedad puramente topológica de compacidad.

Continuidad de transformaciones lineales

Se demostrará que todas las aplicaciones lineales con kernel cerrado y rango de dimensión finita son continuas. Antes, será necesario probar un lema. Este lema proporciona condiciones para que la suma de dos subespacios de espacio normado sea un subespacio cerrado. Hasta el momento lo que se ha visto es que, en general, la suma de dos conjuntos cerrados no siempre es un conjunto cerrado (vea el Ejemplo 4.11) y que la suma de un conjunto cerrado y un conjunto compacto sí es un conjunto cerrado (vea la Proposición 4.19).

4.43 Lema. *Sea E un espacio normado. Si A es un subespacio cerrado de E y B es un subespacio de dimensión finita de E , entonces $A + B$ es un subespacio cerrado de E .*

Demostración. La demostración es por inducción sobre la dimensión de B . Se usará de manera crucial el Ejercicio 2.13 el cual asegura que si A es un subconjunto de un espacio métrico E , entonces

$$\overline{A} = \{x \in E \mid d(x, A) = 0\}.$$

Caso $\dim B = 1$. Sea $b \in B$ tal que $B = \text{lin}\{b\}$. Si $b \in A$, es claro que $A + B = A$, luego $A + B$ sería trivialmente un subespacio cerrado de E . Suponga pues que $b \notin A$. Por el mencionado Ejercicio 2.13, se debe tener que

$$(4.32) \quad \delta = d(b, A) > 0.$$

Para probar que $A + B = A + \text{lin}\{b\}$ es un conjunto cerrado, se fija arbitrariamente

$$x \notin A + \text{lin}\{b\}$$

y se demostrará que $d(x, A + \text{lin}\{b\}) > 0$. Esto implicará, de acuerdo al Ejercicio 2.13, que $x \notin \overline{A + \text{lin}\{b\}}$. Luego, $\overline{A + \text{lin}\{b\}} \subset A + \text{lin}\{b\}$ concluyendo en esta forma que $A + \text{lin}\{b\}$ es un conjunto cerrado.

Observe que

$$\text{lin}\{b\} = \{\lambda b \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = B_1 \cup B_2,$$

donde

$$B_1 = \left\{ \lambda b \mid |\lambda| \leq \frac{2\mathcal{N}(x)}{\delta} \right\} \quad \text{y} \quad B_2 = \left\{ \lambda b \mid |\lambda| > \frac{2\mathcal{N}(x)}{\delta} \right\}.$$

Entonces

$$A + \text{lin}\{b\} = (A + B_1) \cup (A + B_2).$$

Se afirma que $d(x, A + B_1) > 0$. En efecto, note que el conjunto B_1 es compacto (por ser la imagen del intervalo compacto $[-2\mathcal{N}(x)/\delta, 2\mathcal{N}(x)/\delta]$ bajo la función continua $\lambda \mapsto \lambda b$ de $\mathbb{R}$ en E , lo cual puede ser verificado fácilmente como ejercicio por el lector). La Proposición 4.19 implica entonces que el conjunto $A + B_1$ es un conjunto cerrado en E . Ya que $x \notin A + \text{lin}\{b\}$, necesariamente $x \notin A + B_1 = \overline{A + B_1}$. Por el Ejercicio 2.13, se concluye que $d(x, A + B_1) > 0$.

Se afirma que también $d(x, A + B_2) > 0$. En efecto, sean $a \in A$ y $\lambda b \in B_2$ arbitrarios, donde

$$(4.33) \quad |\lambda| > 2\mathcal{N}(x)/\delta.$$

Se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{N}([a + \lambda b] - x) &\geq \mathcal{N}(a + \lambda b) - \mathcal{N}(x) = |\lambda| \mathcal{N}\left(b - \left[-\frac{1}{\lambda}\right] a\right) - \mathcal{N}(x) \\ &\geq |\lambda| \delta - \mathcal{N}(x) \geq \frac{2\mathcal{N}(x)}{\delta} \delta - \mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(x), \end{aligned}$$

donde la segunda desigualdad se cumple por ser A un subespacio y por (4.32); y la tercera, por (4.33). Así pues

$$d(x, A + B_2) = \inf_{z \in A + B_2} d(x, z) \geq \mathcal{N}(x) > 0,$$

donde la última desigualdad se cumple porque $x \notin A + \text{lin}\{b\}$ implica $x \neq 0$ (¿Por qué?).

Esto prueba la afirmación.

Se concluye de lo anterior que

$$d(x, A + \text{lin}\{b\}) = \inf_{z \in A + \text{lin}\{b\}} d(x, z) \geq \min\{d(x, A + B_1), d(x, A + B_2)\} > 0.$$

Por lo dicho, $A + \text{lin}\{b\}$ es un subespacio cerrado de E .

Suponga ahora que el resultado es cierto si $\dim B = n$.

Caso $\dim B = n + 1$. Sea $\{b_1, \dots, b_n, b_{n+1}\}$ una base de B . Como

$$B = \text{lin}\{b_1, \dots, b_n\} + \text{lin}\{b_{n+1}\},$$

entonces

$$A + B = [A + \text{lin}\{b_1, \dots, b_n\}] + \text{lin}\{b_{n+1}\}.$$

La hipótesis inductiva implica que el subespacio $A + \text{lin}\{b_1, \dots, b_n\}$ es cerrado en E . Entonces, por el caso $n = 1$, el subespacio

$$[A + \text{lin}\{b_1, \dots, b_n\}] + \text{lin}\{b_{n+1}\} = A + B$$

debe ser cerrado en E . ■

4.44 Corolario. *Cualquier subespacio de dimensión finita en un espacio normado debe ser un conjunto cerrado.*

Para la demostración, basta aplicar el Lema 4.43 con $A = \{0\}$ (Haga los detalles como ejercicio).

4.45 Teorema. Sea T una aplicación lineal de un espacio normado E en un espacio normado F . Si $\ker T$ es un subespacio cerrado de E y el rango $T(E)$ de T es un subespacio de dimensión finita de F , entonces T es continua.

Demostración. Sea $\{y_1, \dots, y_n\}$ una base de $T(E)$. Para cada $x \in E$, se tiene que $T(x) \in T(E)$ implica que $T(x)$ puede ser escrito de manera única como combinación lineal de la base $\{y_1, \dots, y_n\}$, es decir, existen escalares **únicos**, denotados por $f_1(x), \dots, f_n(x)$, tales que

$$T(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) y_k.$$

La relación anterior define implícitamente n funciones $f_1, \dots, f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$. Usando la linealidad de T se demuestra de inmediato que las funciones $f_1, \dots, f_n$ también son lineales (Ejercicio), es decir, que $f_1, \dots, f_n \in E'$.

Se afirma que los funcionales lineales $f_1, \dots, f_n$ son continuas. En efecto, por simetría basta probar que f_1 es continuo. Escoja $x_1 \in T^{-1}(\{y_1\}), \dots, x_n \in T^{-1}(\{y_n\})$. Se verá primero que

$$(4.34) \quad \ker f_1 = \ker T + \text{lin}\{x_2, \dots, x_n\}.$$

Si $x \in \ker T$, entonces

$$\sum_{k=1}^n f_k(x) y_k = T(x) = 0 = \sum_{k=1}^n 0 \cdot y_k,$$

luego $f_k(x) = 0$, $k = 1, \dots, n$, por la unicidad de los escalares $f_1(x), \dots, f_n(x)$; en particular, $f_1(x) = 0$, es decir, $x \in \ker f_1$. Así pues, $\ker T \subset \ker f_1$. Sea ahora $x \in \text{lin}\{x_2, \dots, x_n\}$. Entonces,

$$x = \sum_{k=2}^n \alpha_k x_k,$$

luego,

$$\sum_{k=1}^n f_k(x) y_k = T(x) = \sum_{k=2}^n \alpha_k T(x_k) = \sum_{k=2}^n \alpha_k y_k = 0 \cdot y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n,$$

donde la primera igualdad se cumple por definición de $f_1(x), \dots, f_n(x)$; la segunda, por linealidad de T ; y la tercera, por la elección de $x_1, \dots, x_n$. Dado que los escalares $f_1(x), \dots, f_n(x)$ son únicos, necesariamente $f_1(x) = 0$ y $f_k(x) = \alpha_k$, $k = 2, \dots, n$. Así pues, $x \in \ker f_1$. Se concluye pues

$$(4.35) \quad \ker T + \text{lin}\{x_2, \dots, x_n\} \subset \ker f_1.$$

Fije ahora $x \in \ker f_1$. Considere el vector

$$x' = \sum_{k=2}^n f_k(x)x_k \in \text{lin}\{x_2, \dots, x_n\}.$$

Por linealidad de T y por ser $f_1(x) = 0$, se tiene

$$T(x') = \sum_{k=2}^n f_k(x)y_k \quad \text{y} \quad T(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)y_k = \sum_{k=2}^n f_k(x)y_k,$$

Se sigue que $T(x) = T(x')$, es decir, $T(x - x') = 0$, o sea, $x - x' \in \ker T$, equivalentemente, $x = (x - x') + x' \in \ker T + \text{lin}\{x_2, \dots, x_n\}$. Se concluye pues que

$$(4.36) \quad \ker f_1 \subset \ker T + \text{lin}\{x_2, \dots, x_n\}.$$

La igualdad (4.34) se sigue entonces de (4.35) y (4.36).

Finalmente, la Proposición 4.30 asegura que un funcional lineal es continuo si y sólo si su kernel es un subespacio cerrado. Ya que por hipótesis $\ker T$ es un subespacio cerrado de E y $\text{lin}\{x_2, \dots, x_n\}$ es un subespacio de dimensión finita de E , (4.34) y el Lema 4.43 implican que

$$\ker f_1 = \ker T + \text{lin}\{x_2, \dots, x_n\}$$

es un subespacio cerrado de E . Por lo tanto, f_1 es continuo. ■

Algunas consecuencias inmediatas del Corolario 4.44 y del Teorema 4.45 son los corolarios siguientes.

4.46 Corolario. Sean E y F dos espacios normados. Si E es de dimensión finita, entonces cualquier aplicación lineal de E en un espacio normado F es continua.

4.47 Corolario. Si E es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces cualesquiera dos normas sobre E son equivalentes. En particular, cualesquiera dos normas sobre $\mathbb{R}^n$ son equivalentes.

Para la demostración, basta recordar que la función identidad es una aplicación lineal y aplicar el Corolario 4.46.

4.48 Corolario. *Si E es un espacio normado de dimensión n , entonces E es isomorfo a $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Dada una base de E y una base de $\mathbb{R}^n$, es posible definir un isomorfismo lineal de $T : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ (Ejercicio). El Corolario 4.46 implica entonces que tanto T como T^{-1} son continuas, luego T es un homeomorfismo lineal de E sobre $\mathbb{R}^n$. ■

Se sigue del Teorema 4.37 y del Corolario 4.48 el resultado siguiente (Ejercicio).

4.49 Corolario. *Todo espacio normado de dimensión finita es un espacio de Banach.*

4.50 Corolario. *En espacios normados de dimensión finita, un conjunto es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

Demostración. Sea E un espacio normado de dimensión n . Por el Corolario 4.48, existe un isomorfismo $T : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ (donde $\mathbb{R}^n$ puede estar provisto de cualquier norma, según el Corolario 4.47). Tanto T como su inversa T^{-1} transforman conjuntos compactos sobre conjuntos compactos. Puesto que los conjuntos compactos en $\mathbb{R}^n$ son los conjuntos cerrados y acotados y tanto T como T^{-1} transforman conjuntos cerrados sobre conjuntos cerrados y conjuntos acotados sobre conjuntos acotados (vea el Corolario 4.40), se concluye pues que los conjuntos compactos en E deben ser los conjuntos cerrados y acotados. ■

Un caso particular del Corolario 4.50 es el resultado siguiente.

4.51 Corolario. *Si E es un espacio normado de dimensión finita, entonces la bola unitaria cerrada U_E de E es un conjunto compacto.*

La recíproca del Corolario 4.51 también es cierta, se llama el teorema de Riesz el cual será tratado en la próxima subsección.

El teorema de Riesz

4.52 Lema. (Lema de Riesz.) *Si A es un subespacio cerrado propio de un espacio normado E , entonces para cada $0 < \varepsilon < 1$ existe $x \in E$ tal que*

$$\mathcal{N}(x) = 1 \quad \text{y} \quad d(x, A) \geq 1 - \varepsilon.$$

Demostración. Puesto que A es un subespacio propio, existe $y \in E \setminus A$. Siendo A cerrado, se tiene

$$\delta = d(y, A) > 0$$

(vea el Ejercicio 2.13). Sea $0 < \varepsilon < 1$. Por ser $\delta/(1 - \varepsilon) > \delta$, existe $a \in A$ tal que

$$\mathcal{N}(y - a) < \frac{\delta}{1 - \varepsilon}.$$

Defina

$$x = \frac{y - a}{\mathcal{N}(y - a)}.$$

Trivialmente se cumple que $\mathcal{N}(x) = 1$. Además, $\forall b \in A$, se tiene

$$\mathcal{N}(x - b) = \frac{\mathcal{N}[y - a - \mathcal{N}(y - a)b]}{\mathcal{N}(y - a)} = \frac{\mathcal{N}(y - a')}{\mathcal{N}(y - a)} \geq \frac{\delta}{\mathcal{N}(y - a)} > \frac{\delta}{\delta/(1 - \varepsilon)} = 1 - \varepsilon,$$

donde la primera desigualdad se cumple porque $a' = a + \mathcal{N}(y - a)b \in A$. Por lo tanto,

$$d(x, A) = \inf_{b \in A} \mathcal{N}(x - b) \geq 1 - \varepsilon. \blacksquare$$

4.53 Teorema. (**Teorema de Riesz.**) Si la bola unitaria cerrada U_E de un espacio normado E es un conjunto totalmente acotado, entonces E tiene dimensión finita. En particular, si U_E es un conjunto compacto, entonces E tiene dimensión finita.

Demostración. Como U_E es totalmente acotado, existen $b_1, \dots, b_n \in U_E$ tales que

$$(4.37) \quad U_E \subset \bigcup_{k=1}^n B\left(b_k, \frac{1}{2}\right).$$

Sea $V = \text{lin}\{b_1, \dots, b_n\}$. Por el Corolario 4.44, V es un subespacio cerrado de E . Si V fuese un subespacio propio de E , existiría $x \in U_E$ tal que

$$d(x, V) > \frac{1}{2},$$

por el Lema 4.52. En particular, se tendría

$$(4.38) \quad \mathcal{N}(x - b_k) > \frac{1}{2}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Claramente (4.38) está en contradicción con (4.37). Se concluye pues que V no puede ser un subespacio propio de E , es decir,

$$X = V = \text{lin}\{b_1, \dots, b_n\},$$

Por lo tanto, E tiene dimensión finita. ■

Se sigue de inmediato del Corolario 4.51 y del Teorema 4.53 el resultado siguiente.

4.54 Corolario. *Para que un espacio normado E tenga dimensión finita es necesario y suficiente que su bola unitaria cerrada U_E sea un conjunto compacto en E .*

Una caracterización de los espacios de Banach de dimensión finita es la siguiente.

4.55 Teorema. *Un espacio de Banach E es de dimensión finita si y sólo si E puede ser escrito como unión numerable de conjuntos compactos.*

Demostración. Suponga que E es de dimensión finita. Entonces la bola unitaria cerrada U_E es un conjunto compacto en E . Ya que la aplicación $x \mapsto nx$ es un homeomorfismo de E sobre E (vea la Proposición 4.4), la imagen de U_E bajo esta aplicación, es decir, el conjunto

$$nU_E = \{x \in E \mid \mathcal{N}(x) \leq n\}$$

es también un conjunto compacto en E , $\forall n \in \mathbb{N}$. Puesto que claramente

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} nU_E,$$

se concluye que E es unión numerable de conjuntos compactos.

Suponga ahora que se cumpla la condición. Escriba pues

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

donde A_n es un conjunto compacto, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ya que E es completo, se sigue del Corolario 3.7 que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A_n^\circ \neq \emptyset$. Sea pues $x_0 \in A_n^\circ$. Existe $r > 0$ tal que $B'(x_0, r) \subset A_n$. Observe que

$$B'(x_0, r) = x_0 + rU_E$$

(Ejercicio). Como $B'(x_0, r)$ es un conjunto cerrado contenido en el conjunto compacto A_n , necesariamente $x_0 + rU_E = B'(x_0, r)$ es también un conjunto compacto en E . Siendo la aplicación $x \mapsto x_0 + rx$ un homeomorfismo de E sobre E (vea la Proposición 4.4) y siendo U_E la imagen del compacto $x_0 + rU_E$ bajo el homeomorfismo inverso, se concluye que U_E también es un conjunto compacto en el espacio normado E . Por el Teorema de Riesz, E es

de dimensión finita. ■

Una consecuencia inmediata del Teorema 4.55 es el resultado siguiente.

4.56 Corolario. *No existen funciones continuas de un espacio normado de dimensión finita sobre un espacio de Banach de dimensión infinita.*

La demostración se deja como ejercicio para el lector.

Ejercicios

Excluya los problemas marcados con *

En lo que sigue E y F denotarán dos espacios normados.

4.1. Muestre que todo subespacio no trivial de E , es decir, que no se reduce a $\{0\}$, es un conjunto no acotado.

***4.2.** Si A es un subespacio propio de E , **pruebe** que $\text{Fr } A$ es un subespacio de X .

4.3. Demuestre las afirmaciones siguientes.

i. $\text{Fr } B(a, r) = \text{Fr } B'(a, r) = S(a, r)$, $r > 0$.

ii. $\text{Diam } S(a, r) = 2r$, $r > 0$.

4.4. Muestre que E provisto de la métrica inducida por su norma, es homeomorfo a su subespacio métrico $B(0, r)$, $r > 0$.

4.5. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión que converge a $x \in E$, **demuestre** que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (x_1 + \cdots + x_n) = x.$$

4.6. Considere el espacio normado $(\mathfrak{c}_0, \mathcal{N}_{\infty})$. **Pruebe** las afirmaciones siguientes.

i. Si $x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{c}_0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x(n_0)| = \mathcal{N}_{\infty}(x)$.

ii. Si $x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in \mathfrak{c}_0$, entonces en ℓ_{∞} se cumple la igualdad

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n) e_n,$$

donde, para toda $n \in \mathbb{N}$, $e_n = \{e_n(k)\}_{k=1}^{\infty} \in \mathfrak{c}_0$ está dado por

$$e_n(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = n, \\ 0 & \text{si } k \neq n. \end{cases}$$

4.7. i. Si $f, g : E \rightarrow F$ son dos funciones continuas, **demuestre** que la función $u :$

$E \times E \rightarrow F$ dada por

$$u(x, y) = f(x) + g(y) \quad \forall x, y \in E,$$

es continua en el espacio producto $E \times E$.

ii. Si $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : E \rightarrow F$ son continuas, **pruebe** que la función $v : E \times E \rightarrow F$ dada por

$$v(x, y) = f(x)g(y), \quad \forall x, y \in E,$$

es continua en el espacio producto $E \times E$.

4.8. Muestre que para $a \in E$ y $\lambda \neq 0$ en $\mathbb{R}$ fijos, las funciones de E sobre E , dadas por

$$x \mapsto a + x, \quad x \mapsto \lambda x \quad \text{y} \quad x \mapsto a + \lambda x,$$

y sus inversas son funciones uniformemente continuas.

4.9. Sean A un subespacio métrico de E y B un subespacio métrico de F . **Demuestre** las siguientes afirmaciones.

i. A y B son subespacios métricos completos de E y F , respectivamente, si y sólo si $A \times B$ es un subespacio métrico completo del espacio producto $E \times F$. En particular, E y F son espacios de Banach si y sólo si el espacio producto $E \times F$ es un espacio de Banach.

ii. A y B son conjuntos compactos en E y F , respectivamente, si y solo si $A \times B$ es un conjunto compacto en el espacio producto $E \times F$.

***4.10.** Sean A un subconjunto arbitrario de E y $r > 0$. **Pruebe** que

$$U_r = \{x \in E \mid d(x, A) < r\} = A + B(0, r)$$

para concluir que U_r que es un conjunto abierto en E . ¿Es

$$V_r = \{x \in E \mid d(x, A) \leq r\}$$

un conjunto cerrado en E ? **Justifique.** Sea ahora C es un conjunto compacto en E . **Muestre** que

$$W_r = \{x \in E \mid d(x, C) \leq r\} = C + B'(0, r)$$

para concluir que V_r un conjunto cerrado en E . ¿Es V_r un conjunto compacto en E ? **Justi-**

fique.

***4.11. Proporcione** un ejemplo de dos conjuntos cerrados en E tal que su suma no sea un conjunto cerrado.

***4.12. Demuestre** que si E es separable y E es isomorfo a F , entonces F es separable. **Deduzca** que el espacio normado $(\mathfrak{C}, \mathcal{N}_\infty)$ de todas las sucesiones convergentes de números reales provisto de la norma uniforme es separable.

***4.13.** Admita que para toda función continua $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe una función polinomial $p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - p(t)| \leq \varepsilon$$

(este resultado será demostrado más adelante). **Pruebe** que es separable el espacio normado $(C([0, 1]), \mathcal{N}_p)$, $1 \leq p \leq \infty$, de todas las funciones continuas de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$.

4.14. Si $T : E \rightarrow F$ es una aplicación lineal continua y no nula, **muestre** que $\ker T$ es un conjunto denso en ninguna parte en E .

4.15. Sea $T : E \rightarrow F$ una aplicación lineal. **Demuestre** las afirmaciones siguientes.

i. Si T es continua y A es un conjunto acotado en E , entonces $T(A)$ es un conjunto acotado en F .

ii. T es continua si y sólo si para toda sucesión acotada $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en E , el conjunto $\{T(x_n) | n \in \mathbb{N}\}$ es acotado en F .

4.16. Pruebe que ℓ_1 está contenido, como conjunto, en ℓ_2 , luego se puede identificar a ℓ_1 como un subespacio normado $(\ell_2, \mathcal{N}_2)$. **Pruebe** que $\mathcal{N}_1$ y $\mathcal{N}_2$ no son normas equivalentes sobre ℓ_1 .

4.17. Si $f : E \rightarrow F$ es una función con la propiedad

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in E,$$

y existe $M \geq 0$ tal que $\mathcal{N}(f(x)) \leq M$, $\forall x \in U_E$, **muestre** que f es lineal y continua.

Sugerencia. Pruebe primero que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, $\forall \lambda \in \mathbb{Q}$ y $\forall x \in E$. Después, muestre que f es continua en cero y deduzca que f es continua en E . Finalmente pruebe que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ y $\forall x \in E$.

4.18. Pruebe que la aplicación lineal T de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{N}_\infty)$ en sí mismo, cuya matriz, con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$, es

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

tiene norma $\|T\| = \max\{|a| + |b|, |c| + |d|\}$.

4.19. Sea I la función identidad de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}_1)$ en $(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}_p)$, donde $1 \leq p \leq \infty$. **Calcule** $\|I\|$ y $\|I^{-1}\|$.

4.20. Fije $N \in \mathbb{N}$. Sea T la función de $(\ell_1, \mathcal{N}_1)$ en $(\mathbb{R}^N, \mathcal{N}_p)$, $1 \leq p \leq \infty$, dada por

$$T(x) = (x(1), 2x(2), \dots, Nx(N)), \quad \forall x \in \ell_1.$$

Muestre que T es una aplicación lineal continua y **calcule** $\|T\|$.

4.21. Considere el espacio vectorial ϕ_0 de todas las sucesiones reales eventualmente constantes de valor cero. Sea $f : \phi_0 \rightarrow \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n), \quad \forall x \in \phi_0.$$

Demuestre primero que f está bien definida y que es un funcional lineal continuo sobre el subespacio ϕ_0 de $(\ell_1, \mathcal{N}_1)$. **Determine** si el funcional lineal f puede o no ser extendido a un funcional lineal continuo $\tilde{f}$ sobre la cerradura $\overline{\phi_0}$ de ϕ_0 en ℓ_1 . En caso de serlo, **calcule** $\|\tilde{f}\|$.

4.22. Sea $f : \ell_2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n)}{n+1}, \quad \forall x \in \ell_2.$$

Demuestre que f está bien definida, que es un funcional lineal continuo sobre ℓ_2 y **calcule** $\|f\|$.

4.23. Sea $f : \ell_1 \rightarrow \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n)}{n}, \quad \forall x \in \ell_1.$$

Pruebe que f está bien definida, que es un funcional lineal continuo sobre ℓ_1 y **calcule** $\|f\|$.

4.24. Sea T la función de $(\mathcal{C}([0, 1]), \mathcal{N}_1)$ en $\mathbb{R}$ definida como

$$T(f) = f(1/2), \quad \forall f \in \mathcal{C}([0, 1]).$$

Verifique que T es un funcional lineal sobre $\mathcal{C}([0, 1])$ **Determine** si T es o no continuo y, en

caso de serlo, **calcule** $\|T\|$. ¿Será o no cerrado el conjunto

$$\{f \in \mathcal{C}([0, 1]) \mid f(1/2) = 0\}$$

en $(\mathcal{C}([0, 1]), \mathcal{N}_1)$? **Resuelva** el mismo problema al emplear la norma $\mathcal{N}_\infty$ en lugar de la norma $\mathcal{N}_1$ sobre $\mathcal{C}([0, 1])$.

4.25. Para cada $f \in \mathcal{BC}([0, \infty[)$ se define $T(f) : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ como la función

$$T(f)(t) = \frac{3 \operatorname{sen}(2\pi t) f(t-1)}{4t}, \quad \forall t \geq 1.$$

Muestre que T es una aplicación lineal continua de $(\mathcal{BC}([0, \infty[), \mathcal{N}_\infty)$ en $(\mathcal{BC}([1, \infty[), \mathcal{N}_\infty)$ y **calcule** $\|T\|$.

4.26. i. Si $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en E y $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión convergente en $\mathbb{R}$, **muestre** que $\{\alpha_n x_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en E .

ii. Pruebe que E es un espacio de Banach si y sólo si la bola unitaria cerrada U_E de E es un subespacio métrico completo de E (con la métrica inducida por su norma).

***4.27. Demuestre** que si un espacio normado contiene alguna esfera compacta, entonces dicho espacio tiene dimensión finita.

Sugerencia. Muestre que $S(0, 1)$ es compacta e imite la demostración del Teorema de Riesz.

***4.28. Pruebe** que no existe ninguna función continua de un espacio normado de dimensión finita sobre un espacio de Banach de dimensión infinita.

***4.29. Intente mostrar** que el espacio normado $(C([a, b], \mathbb{R}), \mathcal{N}_1)$, donde

$$\mathcal{N}_1(f) = \int_a^b |f|, \quad \forall f \in C([a, b], \mathbb{R}),$$

no es un espacio de Banach.

4.30. Los ejercicios y preguntas que aparecen a lo largo del capítulo.

Capítulo 5. Espacios de funciones

El uso de espacios métricos o normados cuyos elementos son funciones (definidas sobre algún espacio métrico y con valores reales o complejos) es bastante frecuente en áreas de estudio como Análisis Real, Análisis Funcional, Teoría de Probabilidad, Ecuaciones Diferenciales, etc. En capítulos anteriores, de hecho, ya se han estudiado varios espacios de funciones (los espacios de sucesiones reales, el espacio de funciones acotadas, el espacio de funciones continuas y acotadas, el espacio de aplicaciones lineales continuas entre dos espacios normados así como algunos de sus subespacios métricos y normados de interés). El propósito de este capítulo es analizar algunos aspectos generales y resultados importantes relacionados con espacios de funciones (sin pretender agotar el tema), destacando entre ellos los relacionados con la convergencia puntual y la convergencia uniforme, el Teorema de Dini, el Teorema de Ascoli-Arzelà y el Teorema de Stone-Weierstrass. El primero de ellos tiene que ver con el paso de la convergencia puntual a la convergencia uniforme de sucesiones de funciones; el segundo, con la compacidad de algunos conjuntos de funciones; y el tercero, con la aproximación de funciones por funciones más simples.

5.1. Sucesiones de funciones

Es natural considerar sucesiones de funciones para analizar diversos aspectos de los espacios de funciones pues, a fin de cuentas, como se ha visto en los capítulos anteriores, es posible caracterizar la topología de un espacio métrico o normado por medio de sucesiones. Sin embargo, por tratarse de funciones, una sucesión de funciones puede converger de distintas formas (puntualmente, uniformemente, en promedio, etc.) a alguna otra función. Esto da lugar a varios problemas básicos que deben ser tratados con cuidado, como son: determinar las relaciones existentes entre los distintos modos de convergencia, establecer condiciones bajo las cuales cierta propiedad que tengan las funciones de la sucesión (continuidad, diferenciabilidad, integrabilidad, etc.) es heredada a la función límite, etc.

Convergencia puntual y convergencia uniforme

Sea X un conjunto no vacío. Dadas dos funciones $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se definen las funciones $f + g : X \rightarrow \mathbb{R}$ y $\lambda f : X \rightarrow \mathbb{R}$ puntualmente en X , es decir,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{y} \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad \forall x \in X.$$

Se denotará por $\mathcal{F}(X)$ algún conjunto de funciones de X en $\mathbb{R}$ que tenga propiedades de espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{R}$ con esas operaciones, como pueden ser ℓ_p , $\mathcal{B}(X)$ o, si X es un espacio métrico, $\mathcal{BC}(X)$ o alguno de sus subespacios. Para cada $c \in \mathbb{R}$, se denotará por $\underline{c} : X \rightarrow \mathbb{R}$ la función constante de valor c , es decir,

$$\underline{c}(x) = c, \quad \forall x \in X.$$

Se escribirá también $f \leq g$ y $f < g$ si

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{y} \quad f(x) < g(x), \quad \forall x \in X,$$

respectivamente.

5.1 Definición. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones en $\mathcal{F}(X)$ y sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función.

i. Se dice que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ **converge puntualmente** a f en X si, para cada $x \in X$, se cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad \forall x \in X,$$

es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

o sea, para cada $x \in X$ y para cada $\varepsilon > 0$ existe $N = N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ (es decir, N depende tanto de ε como del punto $x \in X$) tal que

$$(5.1) \quad n \geq N \quad \implies \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

A f se le llama el **límite puntual** en X de la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y se escribe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \quad \text{puntualmente en } X.$$

ii. Se dice que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ **converge uniformemente** a f en X , si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

o sea, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$(5.2) \quad n \geq N \quad \implies \quad \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

equivalentemente, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$(5.3) \quad n \geq N \quad \implies \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in X,$$

donde un mismo $N \in \mathbb{N}$, que depende de ε , se utiliza en la desigualdad anterior para todos los puntos $x \in S$. Geométricamente, esto quiere decir que, a partir de cierto índice N , la gráfica de f_n se inscribe enteramente dentro de una banda de ancho 2ε centrada en la gráfica de f (Haga un bosquejo). A f se le llama el **límite uniforme** en X de la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y se escribe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \quad \text{uniformemente en } X.$$

Es claro que si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f en X , entonces $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a f en X , pues

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad \forall t \in X,$$

aunque la recíproca no siempre se cumple como se verá en los ejemplos siguientes.

5.2 Ejemplo. Una sucesión de funciones que no converge en ningún punto sería el siguiente.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $f_n :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f_n = (-1)^n \underline{1}.$$

El lector puede verificar fácilmente que la sucesión $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ no converge en $\mathbb{R}$ para ningún $t \in]0, 1[$. ◀

Sea A un subconjunto de X . Se define la **función característica** de A como la función $\chi_A : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

5.3 Ejemplo. Se afirma que si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que $x_n \rightarrow \infty$, entonces la sucesión de funciones $\{\chi_{]0, x_n[}\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a la función $\chi_{]0, \infty[}$ en $\mathbb{R}$. En efecto, fije $t \in \mathbb{R}$. Si $t > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $t \in]0, x_n[$, $\forall n \geq N$. Luego $\chi_{]0, x_n[}(t) = 1$,

$\forall n \geq N$, de donde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{]0, x_n[}(t) = 1 = \chi_{]0, \infty[}(t).$$

Si $t \leq 0$, entonces $t \notin]0, x_n[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, luego $\chi_{]0, x_n[}(t) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, de donde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{]0, x_n[}(t) = 0 = \chi_{]0, \infty[}(t).$$

Así pues,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{]0, x_n[}(t) = \chi_{]0, \infty[}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Esto prueba la afirmación. Por ejemplo, si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es cualquier función, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\chi_{]0, x_n[} = f\chi_{]0, \infty[} \quad \text{puntualmente en } \mathbb{R},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\chi_{]0, 2^n[} = f\chi_{]0, \infty[} \quad \text{puntualmente en } \mathbb{R}.$$

Sin embargo, la sucesión $\{\chi_{]0, x_n[}\}_{n=1}^{\infty}$ no converge uniformemente a ninguna función en $\mathbb{R}$. En efecto, puesto que convergencia uniforme implica convergencia puntual, basta probar que la sucesión $\{\chi_{]0, x_n[}\}_{n=1}^{\infty}$ no converge uniformemente a $\chi_{]0, \infty[}$ en $\mathbb{R}$. Puesto que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |\chi_{]0, x_n[}(t) - \chi_{]0, \infty[}(t)| = 1$$

para una infinidad de índices n (de hecho, $\forall n \in \mathbb{N}$) la sucesión $\{\chi_{]0, x_n[}\}_{n=1}^{\infty}$ no puede converger uniformemente a $\chi_{]0, \infty[}$ en $\mathbb{R}$. Esto prueba que convergencia puntual no necesariamente implica convergencia uniforme. ◀

5.4 Ejemplo. Se afirma que si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que $x_n \rightarrow x_0$, para algún $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces la sucesión de funciones $\{\chi_{]-\infty, x_n[}\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a la función $\chi_{]-\infty, x_0[}$ en $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$. En efecto, si $t < x_0$, entonces existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $t \in]-\infty, x_n[$, $\forall n \geq N_1$, de donde,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{]-\infty, x_n[}(t) = 1 = \chi_{]-\infty, x_0[}(t).$$

Si $t > x_0$, entonces existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $t \notin]-\infty, x_n[$, $\forall n \geq N_2$, de donde,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{]-\infty, x_n[}(t) = 0 = \chi_{]-\infty, x_0[}(t).$$

Así pues,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_{]-\infty, x_n[}(t) = \chi_{]-\infty, x_0[}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}.$$

Esto prueba la afirmación. Por ejemplo, si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es cualquier función, entonces

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} f\chi_{]-\infty, 1-\frac{1}{n}[} &= f\chi_{]-\infty, 1[} \quad \text{puntualmente en } \mathbb{R} \setminus \{1\}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} f\chi_{]-\infty, -1+2^n[} &= f\chi_{]-\infty, -1[} \quad \text{puntualmente en } \mathbb{R} \setminus \{-1\}.\end{aligned}$$

Sin embargo, si $x_n \neq x_0$ para una infinidad de índices n , procediendo de manera similar al Ejemplo 5.3, el lector puede verificar fácilmente que $\{\chi_{]0, x_n[}\}_{n=1}^{\infty}$ no converge uniformemente a ninguna función en $\mathbb{R}$. ◀

5.5 Ejemplo. Sea $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la función

$$f_n(t) = t^n, \quad \forall t \in [0, 1],$$

$\forall n \in \mathbb{N}$. Puesto que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ 1 & \text{si } t = 1, \end{cases}$$

entonces la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente en $[0, 1]$ a la función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ 1 & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

Sin embargo, se afirma que la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ no converge uniformemente a f en $[0, 1]$. En efecto, sea $\varepsilon_0 = 1/2$. Ya que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\delta_n > 0$ tal que

$$|f_n(t) - f_n(1)| = |t^n - 1| < \frac{1}{2}, \quad \forall 1 - \delta_n < t < 1,$$

necesariamente

$$t^n > \frac{1}{2}, \quad \forall 1 - \delta_n < t < 1.$$

Luego

$$\sup_{t \in [0, 1]} |f_n(t) - f(t)| \geq |t^n - 0| > \frac{1}{2} = \varepsilon_0,$$

para una infinidad de índices n (de hecho, $\forall n \in \mathbb{N}$). Esto prueba la afirmación.

Se afirma en cambio que si $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y $g(1) = 0$, entonces la sucesión de funciones $\{gf_n\}_{n=1}^{\infty}$ sí converge uniformemente a la función constante $\underline{0}$ de valor cero en

$[0, 1]$. En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Existe $M > 0$ tal que

$$|g(t)| \leq M, \quad \forall t \in [0, 1].$$

También existe $0 < \delta < 1$ tal que

$$|g(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in [1 - \delta, 1].$$

Entonces

$$(5.4) \quad |g(t)t^n| \leq M(1 - \delta)^n, \quad \forall t \in [0, 1 - \delta],$$

por ser creciente la función $t \mapsto t^n$ en $[0, 1 - \delta]$, y

$$(5.5) \quad |g(t)t^n| \leq |g(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \in [1 - \delta, 1].$$

Puesto que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(1 - \delta)^n = 0,$$

existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$(5.6) \quad M(1 - \delta)^n \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Se concluye de (5.4), (5.5) y (5.6) que

$$\sup_{t \in [0, 1]} |g(t)t^n| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Esto prueba la afirmación. ◀

5.6 Ejemplo. Sea

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisface

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + nx^2} = 0 = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

es decir, converge puntualmente en $\mathbb{R}$ a la función constante de valor cero.

Se afirma que, de hecho, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a f uniformemente en $\mathbb{R}$. En efecto, puesto que la función

$$x \mapsto \frac{|x|}{1 + nx^2}$$

es par, no negativa y continua en $\mathbb{R}$, diferenciable en $]0, \infty[$, toma el valor cero en cero y tiene

límite cero en ∞ , dicha función alcanza su valor máximo sobre $\mathbb{R}$ en el punto $x = 1/\sqrt{n}$, el cual es su único punto crítico de la función en $]0, \infty[$. Luego,

$$|f_n(x)| = \left| \frac{x}{1 + nx^2} \right| \leq \frac{1/\sqrt{n}}{1 + n(1/\sqrt{n})^2} = \frac{1}{2\sqrt{n}}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = 0.$$

Esto prueba la afirmación. ◀

Se tiene la siguiente condición necesaria y suficiente para la convergencia uniforme de una sucesión de funciones.

5.1 Teorema. (Criterio de Cauchy para la convergencia uniforme.) Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones de un conjunto X en $\mathbb{R}$. Se tiene que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a alguna función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ si y sólo si $\forall \varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$(5.7) \quad \sup_{t \in X} |f_m(t) - f_n(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall m \geq n \geq N.$$

equivalentemente,

$$(5.8) \quad \sup_{t \in X} |f_n(t) - f_N(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Demostración. Necesidad. Primero se probará (5.7). Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{t \in E} |f_n(t) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall n \geq N.$$

Entonces $\forall n, m \geq N$, se tiene

$$\begin{aligned} |f_n(t) - f_m(t)| &\leq |f_n(t) - f(t)| + |f(t) - f_m(t)| \\ &\leq \sup_{t \in X} |f_n(t) - f(t)| + \sup_{t \in X} |f(t) - f_m(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in E. \end{aligned}$$

Así pues ε es una cota superior en $\mathbb{R}$ para el conjunto de valores

$$\{|f_n(t) - f_m(t)| \mid t \in E, n, m \geq N\}.$$

En particular,

$$\sup_{t \in E} |f_n(t) - f_m(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N,$$

que es (5.7).

Se verá ahora la equivalencia entre (5.8) y (5.7). Es claro que (5.8) es un caso particular de (5.7). Recíprocamente, suponga que se cumple (5.8). Entonces, para cada $t \in X$, se tiene

$$\begin{aligned} |f_n(t) - f_m(t)| &\leq |f_n(t) - f_N(t)| + |f_N(t) - f_m(t)| \\ &\leq \sup_{x \in X} |f_n(x) - f_N(x)| + \sup_{x \in X} |f_N(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N. \end{aligned}$$

Así pues ε es una cota superior en $\mathbb{R}$ para el conjunto de valores

$$\{|f_n(t) - f_m(t)| \mid t \in E, n, m \geq N\}.$$

En particular,

$$\sup_{t \in E} |f_n(t) - f_m(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N,$$

que es (5.7).

Suficiencia. Se afirma que para cada $t \in X$, la sucesión $\{f_n(t)\}$ de los valores de las funciones en el punto t es de Cauchy en $\mathbb{R}$. En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{t \in X} |f_m(t) - f_n(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall m \geq n \geq N.$$

Fije $t \in X$. Por la desigualdad anterior, se tiene

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq \sup_{x \in E} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall m \geq n \geq N.$$

Esto prueba que la sucesión $\{f_n(t)\}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$.

Como $\mathbb{R}$ es completo, para cada $t \in X$, existe $f(t) \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t).$$

Esto define una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Se verá, de hecho, que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f en X . En efecto, por (5.7), se tiene

$$(5.9) \quad |f_n(t) - f_m(t)| \leq \sup_{x \in X} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N \quad \text{y} \quad \forall t \in X.$$

Ya que ε es cota superior en $\mathbb{R}$ del conjunto de valores

$$\{|f_n(t) - f_m(t)| \mid n, m \geq M, t \in X\},$$

al fijar arbitrariamente $t \in X$ y $n \geq N$, se debe tener

$$|f_n(t) - f(t)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(t) - f_m(t)| \leq \varepsilon.$$

Entonces ε es también cota superior en $\mathbb{R}$ del conjunto de valores

$$\{|f_n(t) - f(t)| \mid t \in X, n \geq N\}.$$

Luego,

$$\sup_{t \in X} |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Esto prueba que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f en X . ■

También existe, desde luego, un criterio de Cauchy para la convergencia puntual: Una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de un conjunto X en $\mathbb{R}$ converge puntualmente a alguna función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ si y sólo si para cada $t \in X$, la sucesión de valores $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ (Ejercicio).

Intercambio de orden de límites

Considere una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones de un espacio métrico X en $\mathbb{R}$ que converge puntualmente a una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ en X , es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t), \quad \forall t \in X.$$

Suponga que f_n es continua en un punto $x \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$. ¿Debe ser f continua en x ? De acuerdo a la primera parte del Ejemplo 5.5, esto no es necesariamente cierto, es decir, la propiedad de continuidad de las funciones f_n no necesariamente se “hereda” a f bajo la sola convergencia puntual (el lector puede proponer ejemplos que muestren que tampoco se “heredan” ni la diferenciabilidad ni la integrabilidad de las funciones de la sucesión a la función límite bajo la convergencia puntual). Sin embargo, para que f sí sea continua en el punto x se debe cumplir

$$\lim_{t \rightarrow x} f(t) = f(x),$$

o sea,

$$\lim_{t \rightarrow x} f(t) = \lim_{t \rightarrow x} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow x} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x),$$

donde la primera y cuarta igualdad se cumplen por la convergencia puntual y la tercera, por la continuidad de f_n , $\forall n \in \mathbb{N}$. Se concluye pues, bajo las dos hipótesis anteriores, que f será continua en $x \in X$ si y sólo si es válido el siguiente intercambio de orden de los límites

$$(5.10) \quad \lim_{t \rightarrow x} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow x} f_n(t).$$

En general, el intercambio de orden de límites en un límite doble no necesariamente es válido. Un ejemplo sería el Ejemplo 5.5, otro más elemental sería

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{n}{n+m} = 0 \neq 1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+m}.$$

Sin embargo, se tiene el resultado siguiente.

5.2 Teorema. Sean $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones de un espacio métrico X en $\mathbb{R}$, E un subconjunto de X y $x \in X$ un punto de acumulación de E . Si para alguna función $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \quad \text{uniformemente en } E$$

y existen en $\mathbb{R}$ los límites

$$(5.11) \quad l_n = \lim_{t \rightarrow x} f_n(t), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

entonces existe en $\mathbb{R}$ el límite

$$l = \lim_{t \rightarrow x} f(t)$$

y se cumplen las identidades siguientes

$$(5.12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow x} f_n(t) = \lim_{t \rightarrow x} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \lim_{t \rightarrow x} f(t) = l.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por el criterio de Cauchy (vea el Teorema 5.1), existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$(5.13) \quad \sup_{t \in E} |f_n(t) - f_m(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N.$$

Se afirma que $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. En efecto, por (5.13), se tiene

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in E \quad \text{y} \quad \forall n, m \geq N,$$

es decir, ε es cota superior del conjunto de valores reales

$$\{|f_n(t) - f_m(t)| \mid t \in E, n, m \geq N\}.$$

En particular, para cualquier $n, m \geq N$ se debe tener

$$|l_n - l_m| = \lim_{t \rightarrow x} |f_n(t) - f_m(t)| \leq \varepsilon.$$

Esto prueba la afirmación. Siendo $\mathbb{R}$ es completo, existe $l \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = l.$$

Se afirma ahora que existe el límite siguiente y se cumple la igualdad

$$l = \lim_{t \rightarrow x} f(t).$$

Por las hipótesis, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$(5.14) \quad \sup_{t \in E} |f_K(t) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad |l_K - l| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

También por hipótesis, existe $\delta > 0$ tal que

$$(5.15) \quad |f_K(t) - l_K| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall t \in B_E(x, \delta) \setminus \{x\}.$$

En virtud de (5.14) y (5.15), se debe tener

$$\begin{aligned} |f(t) - l| &\leq |f(t) - f_K(t)| + |f_K(t) - l_K| + |l_K - l| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \quad \forall t \in B_E(x, \delta) \setminus \{x\}. \end{aligned}$$

Esto prueba la afirmación. ■

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es el resultado siguiente acerca de la continuidad de la función límite.

5.3 Teorema. (Teorema de continuidad para sucesiones de funciones.) Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones de un espacio métrico X en $\mathbb{R}$ que son continuas en un punto $x \in X$ y que convergen uniformemente a una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ en X , entonces f es continua en x , es decir,

$$\lim_{t \rightarrow x} f(t) = \lim_{t \rightarrow x} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow x} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

En particular, si f_n es continua en X , $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces f es continua en X .

Demostración. Basta aplicar el Teorema 5.2 con

$$l_n = f_n(x) = \lim_{t \rightarrow x} f_n(t), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Complete los detalles como ejercicio. ■

La condición de que la sucesión converja uniformemente en el resultado anterior es suficiente pero no es necesaria. Por ejemplo, se verifica fácilmente (Ejercicio) que la sucesión de funciones continuas $\{x/n\}_{n=1}^{\infty}$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ converge puntualmente, pero no uniformemente, en $\mathbb{R}$ a la función $\underline{0}$ constante de valor cero, la cual sí es continua en todo punto.

Otra consecuencia del Teorema 5.2 es el resultado siguiente acerca de la diferenciabilidad de la función límite.

5.4 Teorema. (Teorema de derivación para sucesiones de funciones.) Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones diferenciables de un intervalo compacto $[a, b]$ en $\mathbb{R}$. Se supone que la sucesión de las derivadas $\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente convergente en $[a, b]$ y que, para algún $x_0 \in [a, b]$, la sucesión $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente en $\mathbb{R}$. Entonces, para alguna función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, se cumplen

$$(5.16) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \quad \text{uniformemente en } [a, b]$$

y

$$(5.17) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = f'(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Demostración. Se aplicará el criterio de Cauchy (Teorema 5.1) para probar (5.16). Sea pues $\varepsilon > 0$. Por la convergencia uniforme de $\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $[a, b]$ y la convergencia de $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$(5.18) \quad |f_m(x_0) - f_n(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall m \geq n \geq N,$$

y

$$(5.19) \quad |f'_m(t) - f'_n(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad \forall m \geq n \geq N.$$

Por el Teorema del Valor Medio (aplicado a $f_m - f_n$) y (5.19), se debe tener

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x) - f_m(t) + f_n(t)| &= |x - t| |f'_m(\xi) - f'_n(\xi)| \\ &\leq \frac{|x - t|\varepsilon}{2(b-a)} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x, t \in [a, b] \quad \text{y} \quad \forall m \geq n \geq N, \end{aligned}$$

donde ξ es algún punto intermedio entre x y t . En particular,

$$(5.20) \quad |f_m(x) - f_n(x) - f_m(t) + f_n(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x, t \in [a, b] \quad \text{y} \quad \forall m \geq n \geq N,$$

y

$$(5.21) \quad \frac{|f_m(x) - f_n(x) - f_m(t) + f_n(t)|}{|x - t|} \leq \frac{\varepsilon}{2(b - a)},$$

$$\forall x, t \in [a, b], \quad t \neq x \quad \text{y} \quad \forall m \geq n \geq N.$$

Se sigue de (5.20) y (5.18) que

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &\leq |f_m(x) - f_n(x) - f_m(x_0) + f_n(x_0)| + |f_m(x_0) - f_n(x_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b] \quad \text{y} \quad \forall m \geq n \geq N, \end{aligned}$$

es decir,

$$\sup_{x \in [a, b]} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall m \geq n \geq N.$$

Por lo tanto, se cumple la condición de Cauchy para la convergencia uniforme de la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Existe pues $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que se cumple (5.16).

Fije ahora $x \in [a, b]$. La igualdad (5.17) se cumple si y sólo si se cumple la siguiente cadena de igualdades

$$\begin{aligned} (5.22) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow x} \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x} \\ &= \lim_{t \rightarrow x} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x} = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = f'(x). \end{aligned}$$

Como la primera igualdad se cumple por hipótesis y la tercera, por (5.16), si se demuestra que es válido el intercambio de orden de los límites de la segunda igualdad, necesariamente existirá $f'(x)$ y se cumplirá (5.17). Se aplicará pues el Teorema 5.2 para justificar dicho intercambio de orden de límites. Defina $h_n, h : [a, b] \setminus \{x\} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$h_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x} \quad \text{y} \quad h(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}, \quad \forall t \in [a, b], \quad t \neq x, \quad \text{y} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Note que x es un punto de acumulación de $[a, b] \setminus \{x\}$ en $\mathbb{R}$. Hay que probar que

$$(5.23) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow x} h_n(t) = \lim_{t \rightarrow x} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(t).$$

Por hipótesis, existe

$$f'_n(x) = \lim_{t \rightarrow x} h_n(t), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

De acuerdo a (5.21),

$$|h_n(t) - h_m(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad \forall t \in [a, b], \quad t \neq x, \quad \text{y} \quad \forall m \geq n \geq N,$$

es decir,

$$\sup_{t \in [a, b] \setminus \{x\}} |h_n(t) - h_m(t)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad \forall m \geq n \geq N,$$

o sea, se cumple la condición de Cauchy para la convergencia uniforme en $[a, b] \setminus \{x\}$ de la sucesión de funciones $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$. Por el Teorema 5.1, $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en $[a, b] \setminus \{x\}$. Por lo tanto, se cumplen las dos hipótesis del Teorema 5.2. Así pues, (5.23) es válido. Se concluye de (5.22) que f es diferenciable en $[a, b]$ y que se cumple (5.17). ■

5.7 Ejemplo. Sea

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En el Ejemplo 5.6 se demostró que esta sucesión converge uniformemente a la función $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$f'(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Observe que

$$f'_n(x) = \frac{1 - nx^2}{(1 + nx^2)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Claramente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - nx^2}{(1 + nx^2)^2} = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

donde

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ 0 & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

Debido a que $g(0) = 1 \neq 0 = f'(0)$, la sucesión $\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$ no puede converger uniformemente a g en ningún intervalo de $\mathbb{R}$ que tenga al origen como punto interior, por el Teorema 5.4, a pesar de que la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converja uniformemente a f en esos intervalos. No basta

pues la convergencia uniforme de la sucesión para que la sucesión de las derivadas converja puntualmente a la derivada de la función límite.

Se afirma, sin embargo, que la sucesión $\{f'_n\}_{n=1}^\infty$ sí converge uniformemente a g en cualquier intervalo que no tenga al origen como punto de acumulación. Por paridad, basta probar la afirmación para intervalos de la forma $[a, \infty[$ con $a > 0$. Fije arbitrariamente $x \in [a, \infty[$. Sea $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{\sqrt{K}} \leq a.$$

Para toda $n \geq K$, se tiene $1/\sqrt{n} \leq a \leq x$, luego, $nx^2 \geq 1$, de donde,

$$\left| \frac{1 - nx^2}{(1 + nx^2)^2} \right| = \frac{nx^2 - 1}{(1 + nx^2)^2} \leq \frac{nx^2}{(1 + nx^2)^2} \leq \frac{1}{nx^2} \leq \frac{1}{na^2}.$$

Así pues,

$$\sup_{x \in [a, \infty[} |f'_n(x)| = \sup_{x \in [a, \infty[} \left| \frac{1 - nx^2}{(1 + nx^2)^2} \right| \leq \frac{1}{na^2}, \quad \forall n \geq K.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [a, \infty[} |f'_n(x) - g(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [a, \infty[} |f'_n(x)| = 0.$$

Esto prueba la afirmación. ◀

Aplicaciones importantes del Teorema 5.4 aparecen en los temas de funciones definidas por series de potencias y de funciones definidas por integrales impropias (tratados típicamente en cursos posteriores de análisis complejo y análisis real), es decir, funciones que no estén dadas mediante alguna fórmula explícita.

El problema de la integrabilidad de la función límite de una sucesión de funciones integrables y del intercambio entre límite e integral será discutido en detalle en cursos posteriores de teoría de integración de Lebesgue, razón por la cual será omitido.

Series de funciones

A continuación se presenta el concepto de convergencia puntual y convergencia uniforme en el contexto de series de funciones.

5.8 Definición. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones de un conjunto X en $\mathbb{R}$. Escriba

$$s_n = \sum_{k=1}^n f_k, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se llama **serie** de término general f_n a la pareja de sucesiones $\{\{f_n\}_{n=1}^{\infty}, \{s_n\}_{n=1}^{\infty}\}$. La sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es la **sucesión de sumas parciales** de la serie. Para designar a la serie de término general f_n se acostumbra usar la notación ambigua siguiente (costumbre que adoptaremos)

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

Se dice que la serie de término general f_n **converge puntualmente** en X a alguna función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ si la sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ de sumas parciales de la serie converge a f puntualmente en X , es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(t) = f(t), \quad \forall t \in X.$$

En este caso, a f se le llama la **suma (puntual)** de la serie y se escribe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f \quad \text{puntualmente en } X.$$

También se dice que la serie de término general f_n es **absolutamente convergente** en X^1 si la serie de término general no negativo $|f_n|$ converge puntualmente en X , es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t)| < \infty, \quad \forall t \in X.$$

Finalmente se dice que la serie de término general f_n **converge uniformemente** en X a alguna función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ si la sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ de sumas parciales de la serie converge a f uniformemente en X , es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in X} |s_n(t) - f(t)| = 0.$$

En este caso, a f se le llama la **suma (uniforme)** de la serie y se escribe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f \quad \text{uniformemente en } X.$$

Ya que convergencia uniforme implica convergencia puntual, si una serie de funciones converge uniformemente a alguna función sobre algún conjunto, esta función debe coincidir

¹Se debe tener cuidado en no confundir esta convergencia absoluta con la convergencia absoluta en espacios normados dada en la Definición 4.28

con la función a la que la serie converge puntualmente.

Claramente una condición necesaria y suficiente para que una serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ de un conjunto X en $\mathbb{R}$ sea puntualmente convergente es que se cumpla el **criterio de Cauchy para la convergencia puntual de series**, es decir, para cada $t \in X$ y para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$(5.24) \quad \left| \sum_{k=p}^q f_k(t) \right| \leq \varepsilon, \quad \forall q \geq p \geq N,$$

equivalentemente

$$(5.25) \quad \left| \sum_{k=N}^p f_k(t) \right| \leq \varepsilon, \quad \forall p \geq N.$$

Esto se debe simplemente a que $\mathbb{R}$ es completo y a las desigualdades

$$|s_q(t) - s_p(t)| \leq |s_q(t) - s_{N-1}(t)| + |s_p(t) - s_{N-1}(t)|, \quad \forall q \geq p \geq N,$$

y

$$\left| \sum_{k=N}^p f_k(t) \right| = |s_p(t) - s_{N-1}(t)|, \quad \forall p \geq N$$

(haga los detalles como ejercicio).

Es claro que si una serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ de un conjunto X en $\mathbb{R}$ es absolutamente convergente en X , entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ debe ser puntualmente convergente en X , pues se cumplirá trivialmente (5.25) (criterio de Cauchy para la convergencia puntual), ya que

$$\left| \sum_{k=p}^q f_k(t) \right| \leq \sum_{k=p}^q |f_k(t)|, \quad \forall q \geq p \geq N.$$

Se puede demostrar (Ejercicio) que si una serie de funciones es absolutamente convergente, entonces al rearmar los términos de la serie en cualquier orden se obtendrá una nueva serie que sigue convergiendo puntualmente a la misma función que la serie original.

Se tiene el siguiente criterio de Cauchy para la convergencia uniforme. Este criterio es importante porque permite concluir la convergencia uniforme de una serie aún sin conocer su suma (lo cual ocurre casi siempre con excepción de unas cuantas, como las geométricas, telescópicas y algunas series de potencias).

5.5 Teorema. (Criterio de Cauchy para la convergencia uniforme de series de

funciones.) Una serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ de un conjunto X en $\mathbb{R}$ es uniformemente convergente en X si y sólo si $\forall \varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$(5.26) \quad \left| \sum_{k=p}^q f_k(t) \right| \leq \varepsilon, \quad \forall q \geq p \geq N \quad y \quad \forall t \in X,$$

equivalentemente,

$$(5.27) \quad \left| \sum_{k=N}^p f_k(t) \right| \leq \varepsilon, \quad \forall p \geq N \quad y \quad \forall t \in X.$$

Demostración. Basta observar que

$$\left| \sum_{k=p}^q f_k \right| = |s_q - s_{p-1}|, \quad \forall q \geq p > N,$$

y que

$$\left| \sum_{k=N}^p f_k \right| = |s_p - s_{N-1}|, \quad \forall p > N,$$

donde $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de sumas parciales de la serie. Aplique ahora el Teorema 5.1 para obtener la conclusión (Ejercicio). ■

Criterio M de Weierstrass

Se tiene el siguiente criterio importante para la convergencia absoluta y uniforme de series de funciones.

5.6 Teorema. (Criterio M de Weierstrass para la convergencia uniforme de series.) Considere una serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ de un conjunto X en $\mathbb{R}$. Si existe una sucesión $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números reales no negativos tal que

$$\sup_{t \in X} |f_n(t)| \leq M_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty,$$

entonces la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge absoluta y uniformemente en X .

Demostración. De acuerdo al Teorema 5.5 basta probar que la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ satisface (5.27) (criterio de Cauchy para la convergencia uniforme). Sea pues $\varepsilon > 0$.

Puesto que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ de términos no negativos es convergente, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=N}^p M_k \leq \varepsilon, \quad \forall p \geq N.$$

Ya que

$$\left| \sum_{k=N}^p f_k(t) \right| \leq \sum_{k=N}^p |f_k(t)| \leq \sum_{k=N}^p M_k, \quad \forall p \geq N \quad \text{y} \quad \forall t \in X,$$

necesariamente

$$\left| \sum_{k=N}^p f_k(t) \right| \leq \varepsilon \quad \text{y} \quad \sum_{k=N}^p |f_k(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall p \geq N \quad \text{y} \quad \forall t \in X.$$

Por lo tanto, ambas series $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ satisfacen (5.27). Así pues, esas dos series convergen uniformemente en X . En particular, la segunda converge en todo punto de X , es decir, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es absolutamente convergente en todo punto de X . ■

5.9 Ejemplo. La serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$ converge puntualmente pero no uniformemente en $[0, 1]$.

En efecto, por tratarse de una serie geométrica, se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x) = \begin{cases} (1-x) \left(\frac{x}{1-x} \right) & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases} = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Ahora bien, ya que la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ converge puntualmente a la función

$$s(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{si } x = 1, \end{cases}$$

donde $f_n(x) = x^n(1-x)$ es continua en $[0, 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, y s no es continua en el punto $1 \in [0, 1]$, se sigue del Teorema 5.3, que la serie no puede converger uniformemente a s en $[0, 1]$. ◀

5.10 Ejemplo. La serie de funciones

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n(1-x)$$

converge absoluta y uniformemente en $[0, 1]$.

En efecto, la serie converge absolutamente porque, de acuerdo al Ejemplo 5.9,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n x^n (1-x)| = \sum_{n=1}^{\infty} x^n (1-x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases} < \infty, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Así pues la serie converge puntualmente. De hecho, se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n (1-x) = -\frac{x(1-x)}{1+x} = s(x), \quad \forall x \in [0, 1],$$

nuevamente por tratarse de una serie geométrica, donde, esta vez, la función suma s sí es continua en $[0, 1]$. Se verá ahora que la serie converge uniformemente a s en $[0, 1]$. Se tiene

$$|s(x) - s_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k x^k (1-x) \right| = \frac{x^{n+1}(1-x)}{1+x} \leq x^{n+1}(1-x), \quad \forall x \in [0, 1],$$

luego

$$(5.28) \quad \sup_{x \in [0, 1]} |s(x) - s_n(x)| \leq \sup_{x \in [0, 1]} x^{n+1}(1-x).$$

Ya que la función $x \mapsto x^{n+1}(1-x)$ alcanza su máximo valor en el punto $x = (n+1)/(n+2)$ a lo largo del intervalo $[0, 1]$, se debe tener

$$(5.29) \quad \sup_{x \in [0, 1]} x^{n+1}(1-x) \leq \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n+1} \left(1 - \frac{n+1}{n+2} \right) = \left[\frac{\left(1 - \frac{1}{n+2} \right)^{n+2}}{\frac{n+1}{n+2}} \right] \left[\frac{1}{n+2} \right].$$

Pero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n+2} \right)^{n+2}}{\frac{n+1}{n+2}} = e^{-1},$$

luego existe $M > 0$ tal que

$$\frac{\left(1 - \frac{1}{n+2} \right)^{n+2}}{\frac{n+1}{n+2}} \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se sigue entonces de (5.29),

$$(5.30) \quad \sup_{x \in [0, 1]} x^{n+1}(1-x) \leq M \left[\frac{1}{n+2} \right], \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sea ahora $\varepsilon > 0$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$(5.31) \quad M \left[\frac{1}{n+2} \right] \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Se concluye pues de (5.28), (5.30) y (5.31) que

$$\sup_{x \in [0,1]} |s(x) - s_n(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq N,$$

es decir, que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n (1-x)$ converge uniformemente a s en $[0, 1]$. ◀

Los dos ejemplos anteriores muestran que la convergencia uniforme de $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ junto con la convergencia puntual de $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ no implica necesariamente la convergencia uniforme de $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$.

5.11 Ejemplo. La serie de funciones

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^{\alpha}(1+nx^2)}$$

converge absoluta y uniformemente en $\mathbb{R}$ si $\alpha > 1/2$.

Se aplicará el criterio de Weierstrass para determinar la convergencia absoluta y uniforme de la serie. Fije $n \in \mathbb{N}$. Ya que la función

$$x \mapsto \frac{|x|}{n^{\alpha}(1+nx^2)}$$

es par, toma el valor cero en cero, es diferenciable en $]0, \infty[$ y

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n^{\alpha}(1+nx^2)} = 0,$$

entonces la función alcanza su máximo valor en $x = 1/n^{1/2}$, por ser éste el único punto crítico de la función en $]0, \infty[$. Así pues,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|x|}{n^{\alpha}(1+nx^2)} \leq \frac{1/n^{1/2}}{n^{\alpha}(1+n[1/n^{1/2}]^2)} \leq \frac{1}{n^{\alpha+1/2}}.$$

Puesto que $\alpha + 1/2 > 1$, se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1/2}} < \infty.$$

Por el criterio de Weierstrass la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} x/[n^{\alpha}(1+nx^2)]$ es absoluta y uniformemente convergente en $\mathbb{R}$. ◀

Criterios de Abel

Aparte del criterio de Weierstrass para la convergencia uniforme de una serie de funciones existen otros criterios importantes como los de Abel que se demuestran a continuación.

5.12 Definición. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones de un conjunto X en $\mathbb{R}$. Se dice que

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión **creciente** (**decreciente**, respectivamente) si $f_n \leq f_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ($f_n \geq f_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, respectivamente). También se dice que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones **monótona** si ésta es ya sea creciente o decreciente.

5.13 Definición. Sea $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de funciones de un conjunto X en $\mathbb{R}$. Se dice que $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia de funciones **equiacotada** o **uniformemente acotada** si existe $M \geq 0$ tal que

$$|f_\alpha(x)| \leq M, \quad \forall x \in X \quad \text{y} \quad \forall \alpha \in I.$$

Por ejemplo, toda familia finita de funciones acotadas de X en $\mathbb{R}$ es una familia equiacotada de funciones. La familia de funciones exponenciales $\{e^{-\alpha x}\}_{\alpha \in [0, \infty[}$ es equiacotada en $[0, \infty[$.

5.7 Teorema. (Criterios de Abel para la convergencia uniforme de series.) Considere una serie de funciones de un espacio métrico X en $\mathbb{R}$ la cual puede ser escrita en la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n,$$

donde $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de funciones. Entonces la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ converge uniformemente en X en cualquiera de los dos casos siguientes.

Primer criterio de Abel. Se cumplen:

i. La sucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente acotada en X , es decir, existe $M \geq 0$ tal que

$$(5.32) \quad |g_n(x)| \leq M, \quad \forall x \in X \quad \text{y} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

ii. La serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es uniformemente convergente en X .

Segundo criterio de Abel. Se cumplen:

a). La sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es uniformemente acotada, es decir, existe $K \geq 0$ tal que

$$(5.33) \quad \left| \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| \leq K, \quad \forall x \in X \quad \text{y} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

b). Se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = 0 \quad \text{uniformemente en } X.$$

Demostración. Se aplicará el criterio de Cauchy para la convergencia uniforme de una serie de funciones (Teorema 5.5). Se tiene

$$\begin{aligned}
 (5.34) \quad \left| \sum_{k=p}^q f_k(x) g_k(x) \right| &= \left| \sum_{k=p}^q f_k(x) \sum_{j=p}^k (g_j(x) - g_{j-1}(x)) + \sum_{k=p}^q f_k(x) g_{p-1} \right| \\
 &= \left| \sum_{j=p}^q (g_j(x) - g_{j-1}(x)) \sum_{k=j}^q f_k(x) + g_{p-1}(x) \sum_{k=p}^q f_k(x) \right| \\
 &\leq \sum_{j=p}^q |g_j(x) - g_{j-1}(x)| \left| \sum_{k=j}^q f_k(x) \right| + |g_{p-1}(x)| \left| \sum_{k=p}^q f_k(x) \right| \\
 &= \sum_{j=p}^q (g_j(x) - g_{j-1}(x)) \left| \sum_{k=j}^q f_k(x) \right| + |g_{p-1}(x)| \left| \sum_{k=p}^q f_k(x) \right|, \quad \forall q \geq p,
 \end{aligned}$$

donde la última igualdad se cumple por ser la sucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ decreciente. Sea $\varepsilon > 0$.

Primer criterio de Abel. Por la hipótesis (ii), existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$(5.35) \quad \left| \sum_{k=r}^s f_k(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3M}, \quad \forall x \in X \quad \text{y} \quad \forall s \geq r \geq N.$$

Se tiene

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{k=p}^q f_k(x) g_k(x) \right| &\leq \sum_{j=p}^q (g_j(x) - g_{j-1}(x)) \left| \sum_{k=j}^q f_k(x) \right| + |g_{p-1}(x)| \left| \sum_{k=p}^q f_k(x) \right| \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{3M} \sum_{j=p}^q (g_j(x) - g_{j-1}(x)) + \frac{\varepsilon}{3M} |g_{p-1}| \\
 &= (g_q(x) - g_{p-1}(x) + |g_{p-1}(x)|) \left(\frac{\varepsilon}{3M} \right) \\
 &\leq \left(\frac{\varepsilon}{3M} \right) (3M) \\
 &= \varepsilon, \quad \forall x \in X \quad \text{y} \quad \forall q \geq p \geq N,
 \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad se cumple por (5.34); la segunda, por (5.32); y la última, por (5.35). Se sigue pues del Teorema 5.5 que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ converge uniformemente en X .

Segundo criterio de Abel. Por la hipótesis (b), existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$(5.36) \quad |g_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{6K}, \quad \forall x \in X \quad \text{y} \quad \forall n \geq N.$$

Se tiene

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=p}^q f_k(x) g_k(x) \right| &\leq \sum_{j=p}^q (g_j(x) - g_{j-1}(x)) \left| \sum_{k=j}^q f_k(x) \right| + |g_{p-1}(x)| \left| \sum_{k=p}^q f_k(x) \right| \\
&= \sum_{j=p}^q (g_j(x) - g_{j-1}(x)) \left| \sum_{k=1}^q f_k(x) - \sum_{k=1}^{j-1} f_k(x) \right| \\
&\quad + |g_{p-1}(x)| \left| \sum_{k=1}^q f_k(x) - \sum_{k=1}^{p-1} f_k(x) \right| \\
&\leq \sum_{j=p}^q (g_j(x) - g_{j-1}(x)) \left(\left| \sum_{k=1}^q f_k(x) \right| + \left| \sum_{k=1}^{j-1} f_k(x) \right| \right) \\
&\quad + |g_{p-1}(x)| \left(\left| \sum_{k=1}^q f_k(x) \right| + \left| \sum_{k=1}^{p-1} f_k(x) \right| \right) \\
&\leq (2K) \sum_{j=p}^q (g_j(x) - g_{j-1}(x)) + (2K) |g_{p-1}(x)| \\
&= (2K) (g_q(x) - g_{p-1}(x) + |g_{p-1}(x)|) \\
&\leq (2K) \left(\frac{3\varepsilon}{6K} \right) \\
&= \varepsilon, \quad \forall x \in X \quad y \quad \forall q \geq p > N,
\end{aligned}$$

donde la primera desigualdad se cumple por (5.34); la tercera, por (5.33); y la última, por (5.36). Por el Teorema 5.5, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n$ converge uniformemente en X . ■

Observe que si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisfacen las hipótesis del teorema anterior y todas son funciones constantes, entonces se recobran los criterios de Abel usuales para series numéricas, en particular, el conocido teorema de series alternadas (Ejercicio).

5.14 Ejemplo. Considere la serie de funciones

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}, \quad \forall x \in [0, \infty[,$$

donde la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente en $\mathbb{R}$. Se aplicará el primer criterio de Abel para mostrar que dicha serie de funciones converge uniformemente en $[0, \infty[$.

Observe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(x),$$

donde

$$f_n(x) = a_n, \quad \forall x \in [0, \infty[\quad \text{y} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

y

$$g_n(x) = \frac{1}{n^x}, \quad \forall x \in [0, \infty[\quad \text{y} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La sucesión de funciones $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ es claramente decreciente en $[0, \infty[$ y

$$|g_n(x)| = \left| \frac{1}{n^x} \right| \leq 1, \quad \forall x \in [0, \infty[\quad \text{y} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

es decir, la sucesión de funciones es uniformemente acotada (o equiacotada) en $[0, \infty[$. Además la serie de funciones

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

es uniformemente convergente en $[0, \infty[$, pues toda serie de funciones constantes que sea convergente es trivialmente uniformemente convergente sobre cualquier conjunto. Por el primer criterio de Abel, la serie de funciones

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

es uniformemente convergente en $[0, \infty[$.

Ya que todas las funciones

$$x \mapsto \frac{a_n}{n^x}$$

son continuas en $[0, \infty[$, se sigue del Teorema 5.3 que la función suma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}, \quad \forall x \in [0, \infty[$$

debe ser continua en $[0, \infty[$. En particular, se tiene

$$f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x). \quad \blacktriangleleft$$

5.15 Ejemplo. Considere la serie de funciones

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n (1-x)$$

vista en el Ejemplo 5.10. Se aplicará el segundo criterio de Abel para probar que dicha serie de funciones es uniformemente convergente en $[0, 1]$.

Observe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n (1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(x),$$

donde

$$f_n(x) = (-1)^n, \quad \forall x \in [0, 1] \quad \text{y} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

y

$$g_n(x) = x^n(1-x), \quad \forall x \in [0, 1] \quad \text{y} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Puesto que

$$\left| \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| \leq 2, \quad \forall x \in [0, 1] \quad \text{y} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

la sucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ es claramente decreciente en $[0, 1]$ y (vea el Ejemplo 5.10) se cumple

$$\sup_{x \in [0, 1]} |g_n(x)| \leq \frac{M}{n+2}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

donde $M > 0$ es constante, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = 0 \quad \text{uniformemente en } [0, 1].$$

Por el segundo criterio de Abel, la serie de funciones

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n (1-x)$$

es uniformemente convergente en $[0, 1]$. ◀

Teorema de Dini

Se verá a continuación un caso particular en el que la convergencia puntual implica la convergencia uniforme para sucesiones de funciones.

5.8 Teorema. (Teorema de Dini.) Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión monótona de funciones continuas de un espacio métrico compacto X en $\mathbb{R}$. Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente en X a una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ que es continua en X , entonces $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f en X .

Demostración. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente (¿Por qué?). Sea pues $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, para cada $x \in X$ existe $N(x) \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n \geq N(x).$$

En particular,

$$(5.37) \quad 0 \leq f(x) - f_{N(x)}(x) \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall x \in X.$$

Para cada $x \in X$, existe una vecindad abierta V_x de x en X tal que

$$(5.38) \quad |f(y) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad |f_{N(x)}(y) - f_{N(x)}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall y \in V_x,$$

por ser f y $f_{N(x)}$ continuas.

Por ser $\{V_x\}_{x \in X}$ una cubierta abierta del compacto X , existen $x_1, \dots, x_k \in X$ tales que

$$X \subset \bigcup_{j=1}^k V_{x_j}.$$

Sea $N = \max\{N(x_1), \dots, N(x_k)\}$. Sean $x \in X$ y $n \geq N$ arbitrarios. Entonces $x \in V_{x_j}$ para algún $j \in \{1, \dots, k\}$. Así pues,

$$\begin{aligned} 0 \leq f(x) - f_n(x) &\leq f(x) - f_N(x) \leq f(x) - f_{N(x_j)}(x) \\ &\leq |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - f_{N(x_j)}(x_j)| + |f_{N(x_j)}(x_j) - f_{N(x_j)}(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

donde la segunda y tercera desigualdades se cumple por ser $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ creciente; y la quinta, por (5.37) y (5.38). Por lo tanto,

$$\sup_{x \in X} |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq N. \blacksquare$$

5.16 Ejemplo. La sucesión de funciones

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx^2}}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

es claramente decreciente y converge puntualmente a la función constante $\underline{0}$ de valor cero en $\mathbb{R}$. Como cada f_n y la función límite puntual $\underline{0}$ son continuas en $\mathbb{R}$, se sigue del teorema de Dini que $\{e^{-n^2x^2}/n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a cero uniformemente en cualquier compacto de $\mathbb{R}$. Se puede demostrar en este caso (Ejercicio) que, de hecho, la convergencia es uniforme en todo $\mathbb{R}$. ◀

5.17 Observación. Si en el teorema de Dini no se cumple que X es compacto, la conclusión

puede fallar. Por ejemplo, la sucesión de funciones

$$f_n(x) = \frac{1}{nx + 1}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

es decreciente y converge puntualmente a la función constante $\underline{0}$ de valor cero en el intervalo abierto $]0, 1[$. Además, cada f_n y la función límite $\underline{0}$ son continuas en $]0, 1[$. Sin embargo, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ no converge uniformemente a $\underline{0}$ en $]0, 1[$ (Ejercicio). También, si en dicho teorema no se cumple la hipótesis de continuidad de la función límite puntual f , el teorema puede fallar, como se muestra en el Ejemplo 5.5.

La hipótesis de monotonía de la sucesión de funciones en el teorema de Dini se cumplirá trivialmente en casos donde $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ es la sucesión de sumas parciales de una serie de funciones todas no negativas o todas no positivas. Por ejemplo, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} = e^{|x|}$$

es uniformemente convergente en todo intervalo compacto de $\mathbb{R}$ (el lector puede verificar como ejercicio que se puede llegar alternativamente a esta conclusión aplicando el criterio de Weierstrass). $\triangleleft$

5.2. Compacidad

Se caracterizarán los conjuntos relativamente compactos en el espacio de funciones continuas de un espacio métrico compacto X en $\mathbb{R}$.

5.18 Definición. Sea X un espacio métrico y sea $\mathcal{H}$ un conjunto de funciones de X en $\mathbb{R}$. Se dice que el conjunto $\mathcal{H}$ es **equicontinuo en un punto** $x_0 \in X$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, x_0) < \delta \quad \implies \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

También se dice que $\mathcal{H}$ es un conjunto **equicontinuo** si es equicontinuo en todo punto de X .

Observe que si $\mathcal{H}$ consiste de una sola función f , la definición anterior se reduce a la definición usual de continuidad para la función f en x_0 . En el caso general, la definición exige que cada función en $\mathcal{H}$ sea continuas en x_0 pero que sea utilizada una misma vecindad δ de

x_0 en la definición de continuidad para todas las funciones de $\mathcal{H}$.

5.19 Ejemplo. Todo conjunto finito de funciones de un espacio métrico X en $\mathbb{R}$ que sean continuas en $x_0 \in X$ es un conjunto equicontinuo en x_0 . Así mismo, la unión de cualquier familia finita de conjuntos de funciones equicontinuas en x_0 es equicontinua en x_0 . El lector puede verificar fácilmente las afirmaciones anteriores como ejercicio. ◀

5.20 Ejemplo. Sea $\mathcal{H}$ un conjunto de funciones de un espacio métrico X en $\mathbb{R}$. Si existen $c, \alpha > 0$ tales que

$$|f(x) - f(y)| \leq cd(x, y)^\alpha, \quad \forall x, y \in X,$$

claramente $\mathcal{H}$ es un conjunto equicontinuo. Por ejemplo, se puede verificar de inmediato que la familia de funciones $\{e^{-at}\}_{a \geq 1}$ es equicontinua en $[0, \infty[$ (Ejercicio). ◀

5.9 Proposición. Sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de funciones de un espacio métrico X en $\mathbb{R}$. Si $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ es equicontinua en un punto $x_0 \in X$ y converge puntualmente a alguna función g en X , entonces g es continua en x_0 .

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, x_0) \leq \delta \quad \implies \quad |f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

es decir, ε es una cota superior del conjunto de valores en $\mathbb{R}$

$$\{|f_n(x) - f_n(x_0)| \mid d(x, x_0) \leq \delta \text{ y } n \in \mathbb{N}\}.$$

En particular, $d(x, x_0) \leq \delta$ implica

$$|g(x) - g(x_0)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Por lo tanto g es continua en x_0 . ■

Recuerde que una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ en el espacio de Banach $(\mathcal{B}(X), \mathcal{N}_\infty)$ de funciones acotadas de un conjunto X en $\mathbb{R}$ provisto de la norma uniforme, converge a una función $g \in \mathcal{B}(X)$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}_\infty(g - f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in X} |g(x) - f_n(x)| = 0.$$

Esto significa que una sucesión de funciones en $\mathcal{B}(X)$ es convergente con respecto a la norma del espacio si y sólo es uniformemente convergente como sucesión de funciones de X en $\mathbb{R}$.

Se tiene pues el corolario siguiente de la proposición anterior (Ejercicio).

5.10 Corolario. *La adherencia en $\mathcal{B}(X)$ de un subconjunto equicontinuo es un conjunto equicontinuo.*

Aparte del teorema de Dini se cuenta con el resultado siguiente que permite el paso de la convergencia puntual a la convergencia uniforme.

5.11 Teorema. *Sea X un espacio métrico compacto y sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en el espacio de Banach $(\mathcal{C}(X), \mathcal{N}_{\infty})$ de las funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ provisto de la norma uniforme. Si la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es equicontinua y converge puntualmente a alguna función g , entonces $g \in \mathcal{C}(X)$ y $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a g con respecto a la norma de $\mathcal{C}(X)$, es decir, uniformemente en X .*

Demostración. Por la Proposición 5.9, g es continua en todo punto de X , es decir, $g \in \mathcal{C}(X)$. Resta probar que la convergencia es uniforme en X . Sea pues $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, para cada $x \in X$ existe una vecindad abierta V_x de x en X tal que

$$(5.39) \quad |f_n(y) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall y \in V_x \quad \text{y} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En particular, $\varepsilon/3$ es una cota superior del conjunto de valores en $\mathbb{R}$

$$\{|f_n(y) - f_n(x)| \mid y \in V_x, n \in \mathbb{N}\}.$$

Luego

$$(5.40) \quad |g(y) - g(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(y) - f_n(x)| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(y) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall y \in V_x.$$

Por ser X compacto, existen $x_1, \dots, x_k \in X$ tales que $V_{x_1}, \dots, V_{x_k}$ forman una subcubierta finita de X . Como $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a g en X , existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$(5.41) \quad |f_n(x_j) - g(x_j)| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall n \geq N \quad \text{y} \quad j = 1, \dots, k.$$

Si $y \in X$ y $n \geq N$, existe $j \in \{1, \dots, k\}$ tal que $y \in V_{x_j}$, luego

$$|f_n(y) - g(y)| \leq |f_n(y) - f_n(x_j)| + |f_n(x_j) - g(x_j)| + |g(x_j) - g(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

por (5.39), (5.40) y (5.41). Esto prueba que ε es cota superior del conjunto de valores en $\mathbb{R}$

$$\{|f_n(y) - g(y)| \mid y \in X, n \geq N\}.$$

En particular,

$$\sup_{y \in X} |f_n(y) - g(y)| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq N.$$

Por lo tanto, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a g uniformemente en X . ■

5.12 Teorema. (Teorema de Ascoli-Arzelà.) Sea X un espacio métrico compacto y sea $\mathcal{H}$ un subconjunto del espacio de Banach $(\mathcal{C}(X), \mathcal{N}_{\infty})$ de las funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ provisto de la norma uniforme. Entonces $\mathcal{H}$ es un conjunto relativamente compacto en $\mathcal{C}(X)$ si y sólo si $\mathcal{H}$ es equicontinuo en X y para cada $x \in X$ el conjunto

$$\mathcal{H}(x) = \{f(x) \mid f \in \mathcal{H}\}$$

es relativamente compacto en $\mathbb{R}$, es decir, para cada $x \in X$ existe $M \geq 0$ tal que

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Demostración. Recuerde que por ser $\mathcal{C}(X)$ completo, un subconjunto de $\mathcal{C}(X)$ es relativamente compacto si y sólo si es totalmente acotado (vea el Teorema 3.34).

(a). Suponga que $\mathcal{H}$ es un conjunto relativamente compacto en $\mathcal{C}(X)$. Se debe probar que para cada $x \in X$, el conjunto $\mathcal{H}$ es equicontinuo en x y el conjunto $\mathcal{H}(x)$ es acotado en $\mathbb{R}$. Fije pues $x \in X$ y $0 < \varepsilon < 1$. Por ser $\mathcal{H}$ totalmente acotado, existen un número finito de puntos $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{H}$ tales que

$$(5.42) \quad \mathcal{H} \subset \bigcup_{j=1}^k B(f_j, \varepsilon/3).$$

Ya que $f_1, \dots, f_k$ son continuas en x , existe una vecindad V de x en X tal que

$$(5.43) \quad |f_j(y) - f_j(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \forall y \in V \quad \text{y} \quad j = 1, \dots, k.$$

Sea $f \in \mathcal{H}$ arbitraria. Existe $j \in \{1, \dots, k\}$ tal que $f \in B(f_j, \varepsilon/3)$. Entonces

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leq |f(y) - f_j(y)| + |f_j(y) - f_j(x)| + |f_j(x) - f(x)| \\ &\leq \mathcal{N}_{\infty}(f - f_j) + \frac{\varepsilon}{3} + \mathcal{N}_{\infty}(f - f_j) = \varepsilon, \quad \forall y \in V, \end{aligned}$$

donde la segunda desigualdad se cumple por (5.43) y la tercera, por (5.42). Esto prueba que $\mathcal{H}$ es un conjunto equicontinuo en $\mathcal{C}(X)$. Además,

$$|f(x) - f_j(x)| \leq \mathcal{N}_{\infty}(f - f_j) \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

implica

$$|f(x)| \leq |f_j(x)| + \frac{\varepsilon}{3} \leq |f_j(x)| + 1.$$

Se concluye pues que

$$|f(x)| \leq M, \quad \forall f \in \mathcal{H},$$

donde $M = \max\{|f_1(x)|, \dots, |f_k(x)|\} + 1$, es decir, $\forall x \in X$, $\mathcal{H}(x)$ es acotado en $\mathbb{R}$.

(b). Suponga ahora que se cumplen las condiciones del teorema. Hay que probar que $\mathcal{H}$ es un conjunto totalmente acotado en $\mathcal{C}(X)$. Sea pues $\varepsilon > 0$. Ya que $\mathcal{H}$ es equicontinua en X , para cada $x \in X$ existe una vecindad abierta V_x de x tal que

$$(5.44) \quad |f(y) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4}, \quad \forall y \in V_x \quad \text{y} \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Siendo X compacto, existen $x_1, \dots, x_n \in X$ tales que

$$(5.45) \quad X = \bigcup_{j=1}^n V_{x_j}.$$

Por hipótesis, el conjunto $\bigcup_{j=1}^k \mathcal{H}(x_j)$ debe ser acotado en $\mathbb{R}$, luego totalmente acotado. Existen pues $c_1, \dots, c_m \in \bigcup_{j=1}^k \mathcal{H}(x_j)$ tales que

$$(5.46) \quad \bigcup_{i=1}^m \mathcal{H}(x_i) \subset \bigcup_{j=1}^k B(c_i, \varepsilon/4).$$

Observe que dada cualquier $f \in \mathcal{H}$, el valor $f(x_j)$ y debe ser “casi” igual a algún valor c_i . Esto sugiere agrupar los elementos de $\mathcal{H}$ en subconjuntos que dependan de la cercanía que tenga $f(x_j)$ con algún c_i , donde es posible que varios $f(x_j)$ estén cerca de un mismo c_i . Más precisamente, defina el conjunto finito

$$\Phi = \{\varphi \mid \varphi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, m\}\}$$

y, para cada $\varphi \in \Phi$, defina

$$L_\varphi = \left\{ f \in \mathcal{H} \mid |f(x_j) - c_{\varphi(j)}| \leq \frac{\varepsilon}{4} \right\}.$$

Se afirma que los conjuntos L_φ recubren a $\mathcal{H}$. En efecto, dada $f \in \mathcal{H}$, se debe tener

$$f(x_k) \in \bigcup_{j=1}^n \mathcal{H}(x_j), \quad k = 1, \dots, n.$$

Luego, para cada $k \in \{1, \dots, n\}$ existe $\alpha(k) \in \{1, \dots, m\}$ tal que $f(x_j) \in B(c_{\alpha(k)}, \varepsilon/4)$, por (5.46). En esta forma se tiene definida una función $\alpha \in \Phi$ con la propiedad de que $f \in L_\alpha$. Esto prueba que

$$\mathcal{H} \subset \bigcup_{\varphi \in \Phi} L_\varphi.$$

Se afirma ahora que $\text{Diam } L_\varphi \leq \varepsilon$, $\forall \varphi \in \Phi$. En efecto, fije $\varphi \in \Phi$ y $f, g \in L_\varphi$. Sea $x \in X$ arbitrario. Por (5.45), existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x \in V_{x_j}$, luego

$$(5.47) \quad |f(x) - f(x_j)| \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{y} \quad |g(x) - g(x_j)| \leq \frac{\varepsilon}{4},$$

por (5.44). Se sigue de (5.47), (5.44) y de la definición de L_φ que

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &\leq |f(x) - f(x_j)| + |f(x_j) - c_{\varphi(j)}| + |c_{\varphi(j)} - g(x_j)| + |g(x_j) - g(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Así pues,

$$\mathcal{N}_\infty(f - g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon.$$

Esto prueba la afirmación. Por lo tanto, $\mathcal{H}$ es totalmente acotado. ■

5.3. Aproximación

En esta sección se demuestran algunos resultados relacionados con la densidad de algunos subconjuntos de los espacios de funciones continuas, destacando el teorema de Stone-Weierstrass. En particular, se concluye la separabilidad de algunos de estos espacios.

Sublatices

Dadas dos funciones f y g de un conjunto S en $\mathbb{R}$, la envoltura superior e inferior de f y g , respectivamente, se definen como las funciones $f \vee g, f \wedge g : S \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$(f \vee g)(s) = \max\{f(s), g(s)\} \quad \text{y} \quad (f \wedge g)(s) = \min\{f(s), g(s)\}, \quad \forall s \in S.$$

5.21 Definición. Sea S un conjunto y $\mathcal{E}$ una familia de funciones de S en $\mathbb{R}$.

i. Se dice que $\mathcal{E}$ es un **lattice** si

$$f \vee g, f \wedge g \in \mathcal{E}, \quad \forall f, g \in \mathcal{E}.$$

ii. Se dice que $\mathcal{E}$ es un **lattice lineal** si $\mathcal{E}$ es un espacio vectorial y un lattice.

iii. Se dice que $\mathcal{E}$ **separa puntos de** S si $\forall x \neq y$ en S existe $f \in \mathcal{E}$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

iv. Se dice que $\mathcal{E}$ **separa fuertemente puntos de** S si $\forall x \neq y$ en S y $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ existe $f \in \mathcal{E}$ tal que $f(x) = \alpha$ y $f(y) = \beta$.

Como siempre, se denotará por $\underline{\alpha}$ la función constante de valor α , $\alpha \in \mathbb{R}$.

5.22 Ejemplo. La familia $\mathcal{C}_p([-1, 1])$ de todas las funciones continuas pares de $[-1, 1]$ en $\mathbb{R}$ es un sublatice lineal de $\mathcal{C}([-1, 1])$, pero no separa puntos de $[-1, 1]$ (Ejercicio). ◀

5.23 Ejemplo. Interpretando a ℓ_∞ como el espacio $\mathcal{B}(\mathbb{N})$ de todas las funciones acotadas de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$, $\mathbf{e}_0$ y ϕ_0 serían dos sublatices lineales de ℓ_∞ que separan fuertemente puntos de $\mathbb{N}$ (Ejercicio). ◀

Se tiene el siguiente resultado básico de aproximación.

5.13 Teorema. Sea X un espacio métrico compacto. Si $\mathcal{E}$ es un sublatice de $\mathcal{C}(X)$ que separa fuertemente puntos de X , entonces $\mathcal{E}$ es un conjunto denso en el espacio normado $\mathcal{C}(X)$ provisto de la norma uniforme $\mathcal{N}_\infty$.

Demostración. Fije $f \in \mathcal{C}(X)$ y $\varepsilon > 0$.

Se afirma que para cada $x \in X$ existe $g_x \in \mathcal{E}$ tal que

$$(5.48) \quad g_x(x) = f(x) \quad \text{y} \quad g_x(y) \geq f(y) - \varepsilon, \quad \forall y \in X.$$

En efecto, puesto que $\mathcal{E}$ separa fuertemente puntos de X , para cada $y \in X$ debe existir $h_y \in \mathcal{E}$ tal que $h_y(x) = f(x)$ y $h_y(y) = f(y)$. Siendo $h_y - f$ continua en X y $(h_y - f)(y) = 0$, existe una vecindad abierta V_y de y en X tal que $(h_y - f)(z) \geq -\varepsilon$, $\forall z \in V_y$. Así pues, para cada $y \in X$, se tiene

$$(5.49) \quad h_y(x) = f(x) \quad \text{y} \quad h_y(z) \geq f(z) - \varepsilon, \quad \forall z \in V_y.$$

Como X es compacto, existe una subcubierta finita $V_{y_1}, \dots, V_{y_m}$ de X . La función

$$g_x = h_{y_1} \vee \dots \vee h_{y_m}$$

pertenece a $\mathcal{E}$ por ser éste un sublatice. Además, dado $y \in X$ arbitrario, se tiene que $y \in V_{y_k}$ para algún $k \in \{1, \dots, m\}$, luego, por (5.49) se debe tener

$$g_x(y) = h_{y_1}(y) \vee \dots \vee h_{y_m}(y) \geq h_{y_k}(y) \geq f(y) - \varepsilon$$

y

$$g_x(x) = h_{y_1}(x) \vee \cdots \vee h_{y_m}(x) = f(x).$$

Esto prueba (5.48).

Se afirma finalmente que existe $g \in \mathcal{E}$ tal que

$$(5.50) \quad f(y) - \varepsilon \leq g(y) \leq f(y) + \varepsilon, \quad \forall y \in X.$$

En efecto, para cada $x \in X$, la función $g_x \in \mathcal{E}$ satisface que $g_x - f$ es continua en X y $(g_x - f)(x) = 0$. Luego existe una vecindad abierta W_x de x en X tal que $(g_x - f)(y) \leq \varepsilon$, $\forall y \in W_x$, es decir,

$$(5.51) \quad g_x(y) \leq f(y) + \varepsilon, \quad \forall y \in W_x.$$

Siendo X compacto, existe una subcubierta finita $W_{x_1}, \dots, W_{x_n}$ de X . La función

$$g = g_{x_1} \wedge \cdots \wedge g_{x_n}$$

pertenece a $\mathcal{E}$ por ser éste un sublattice. Además, dado cualquier $x \in X$, se tiene que $x \in W_{x_j}$ para algún $j \in \{1, \dots, n\}$. Por (5.48), se debe tener

$$g(x) = g_{x_1}(x) \wedge \cdots \wedge g_{x_n}(x) \geq f(x) - \varepsilon$$

y, por (5.51),

$$g(x) = g_{x_1}(x) \wedge \cdots \wedge g_{x_n}(x) \leq g_{x_j}(x) \leq f(x) + \varepsilon.$$

Esto prueba (5.50). Se sigue de las dos desigualdades anteriores que $g \in \mathcal{E}$ satisface

$$f(x) - \varepsilon \leq g(x) \leq f(x) + \varepsilon, \quad \forall x \in X,$$

es decir,

$$\mathcal{N}_\infty(f - g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon.$$

Por lo tanto, $\mathcal{E}$ es denso en $\mathcal{C}(X)$. ■

Observe que si no se cumple la hipótesis de ser X compacto, el teorema puede fallar. Por ejemplo, $\mathfrak{c}_0$ es un sublattice de ℓ_∞ que separa fuertemente puntos de $\mathbb{N}$, pero $\mathfrak{c}_0$ no es denso en ℓ_∞ (Ejercicio).

Subálgebras

Dadas dos funciones f y g de un conjunto S en $\mathbb{R}$, recuerde que la función $fg : S \rightarrow \mathbb{R}$ fue definida como

$$(fg)(s) = f(s)g(s), \quad \forall s \in S.$$

5.24 Definición. Sea S un conjunto y sea $\mathcal{E}$ una familia de funciones de S en $\mathbb{R}$. Se dice que $\mathcal{E}$ es una **álgebra** si $\mathcal{E}$ es un espacio vectorial y

$$fg \in \mathcal{E}, \quad \forall f, g \in \mathcal{E}.$$

5.25 Ejemplo. El conjunto de funciones polinomiales y el conjunto de funciones polinomiales de grado par son dos subálgebras de $\mathcal{C}([0, 1])$ (Ejercicio). ◀

5.14 Proposición. Sea S un conjunto. Si $\mathcal{E}$ es una subálgebra del espacio normado $\mathcal{B}(S)$ provisto de la norma uniforme $\mathcal{N}_\infty$, entonces su adherencia $\overline{\mathcal{E}}$ en $\mathcal{B}(S)$ también es una subálgebra.

Demostración. Ya se sabe que $\overline{\mathcal{E}}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{B}(S)$ (vea la Proposición 4.17). Sean ahora $f_0, g_0 \in \overline{\mathcal{E}}$ y $\varepsilon > 0$. Existen $f, g \in \mathcal{E}$ tales que

$$\mathcal{N}_\infty(f - f_0) \leq \frac{\varepsilon/2}{\mathcal{N}_\infty(g_0) + 1} \quad \text{y} \quad \mathcal{N}_\infty(g - g_0) \leq \min \left\{ 1, \frac{\varepsilon/2}{\mathcal{N}_\infty(f_0) + 1} \right\}.$$

En particular, $\mathcal{N}_\infty(g) \leq \mathcal{N}_\infty(g_0) + 1$ (Explique). Se sigue de las desigualdades anteriores que

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\infty(fg - f_0g_0) &\leq \mathcal{N}_\infty[(f - f_0)g] + \mathcal{N}_\infty[f_0(g - g_0)] \\ &\leq \mathcal{N}_\infty(g)\mathcal{N}_\infty(f - f_0) + \mathcal{N}_\infty(f_0)\mathcal{N}_\infty(g - g_0) \\ &\leq [\mathcal{N}_\infty(g_0) + 1]\mathcal{N}_\infty(f - f_0) + \mathcal{N}_\infty(f_0)\mathcal{N}_\infty(g - g_0) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Puesto que $fg \in \mathcal{E}$, esto prueba que $f_0g_0 \in \overline{\mathcal{E}}$. ■

Para establecer la relación entre álgebras y latices será necesario probar primero el siguiente lema.

5.15 Lema. Si $\Delta : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es la función valor absoluto, es decir,

$$\Delta(t) = |t|, \quad \forall t \in [-1, 1],$$

entonces existe una sucesión de polinomios $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a Δ uniformemente en $[-1, 1]$.

Demostración. Se define inductivamente la sucesión de polinomios $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ como

$$p_1(t) = 0 \quad \text{y} \quad p_{n+1}(t) = p_n(t) + \frac{1}{2}[t^2 - p_n^2(t)], \quad \forall t \in [-1, 1] \quad \text{y} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por ejemplo, $p_2(t) = t^2/2$ y $p_3(t) = t^2 - (t^4/8)$. Se afirma que la sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisface

$$(5.52) \quad 0 \leq p_n \leq \Delta \quad \text{y} \quad p_n \leq p_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En efecto, es claro que, $\forall t \in [-1, 1]$, se cumple $0 \leq p_1(t) \leq |t|$, luego $p_1^2(t) \leq t^2$, de donde

$$p_1(t) \leq p_1(t) + \frac{1}{2}[t^2 - p_1^2(t)] = p_2(t).$$

Así pues, se cumple (5.52) para $n = 1$. Suponga ahora que se cumple (5.52) para $n = k$. Observe que

$$(5.53) \quad |t| - p_{k+1}(t) = |t| - p_k(t) - \frac{1}{2}[t^2 - p_k^2(t)] \\ = [|t| - p_k(t)] \left[1 - \frac{1}{2}(|t| + p_k(t)) \right], \quad \forall t \in [-1, 1].$$

Si $t \in [-1, 1]$, entonces $p_k(t) \leq |t|$, por la hipótesis inductiva, luego $|t| + p_k(t) \leq 2|t| \leq 2$, de donde,

$$\frac{1}{2}[|t| + p_k(t)] \leq 1,$$

es decir,

$$(5.54) \quad 1 - \frac{1}{2}[|t| + p_k(t)] \geq 0.$$

También, por la hipótesis inductiva, se tiene

$$(5.55) \quad 0 \leq |t| - p_k(t), \quad \forall t \in [-1, 1].$$

Aplicando (5.54) y (5.55) a (5.53), se obtiene

$$|t| - p_{k+1}(t) \geq 0, \quad \forall t \in [-1, 1],$$

Puesto que (5.52) se cumple para $n = k$, en particular se debe tener

$$0 \leq p_k(t) \leq p_{k+1}(t), \quad \forall t \in [-1, 1].$$

Se concluye de las dos desigualdades anteriores que

$$(5.56) \quad 0 \leq p_{k+1}(t) \leq |t|, \quad \forall t \in [-1, 1].$$

Se sigue de (5.56) que

$$(5.57) \quad p_{k+1}(t) \leq p_{k+1}(t) + \frac{1}{2}[t^2 - p_{k+1}^2(t)] = p_{k+2}(t), \quad \forall t \in [-1, 1].$$

Se concluye de (5.56) y (5.57) que (5.52) se cumple para $n = k+1$. Esto prueba la afirmación.

La sucesión de polinomios $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ es pues creciente, no negativa y acotada superiormente por Δ en $[-1, 1]$. Existe pues el límite puntual

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(t), \quad \forall t \in [-1, 1].$$

Por definición de $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ se tiene entonces

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{n+1}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[p_n(t) + \frac{1}{2}(t^2 - p_n^2(t)) \right] = f(t) + \frac{1}{2}[t^2 - f^2(t)], \quad \forall t \in [-1, 1],$$

es decir,

$$f(t) = |t|, \quad \forall t \in [-1, 1].$$

Así pues, $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente de funciones continuas que converge puntualmente a la función continua Δ en el compacto $[-1, 1]$. Se sigue del Teorema de Dini (Teorema 5.8), que dicha sucesión converge a Δ uniformemente en $[-1, 1]$. ■

5.16 Teorema. Sea S un conjunto. Si $\mathcal{E}$ es una subálgebra cerrada del espacio $\mathcal{B}(S)$ de funciones acotadas de S en $\mathbb{R}$ provisto de la norma uniforme $\mathcal{N}_{\infty}$, entonces $\mathcal{E}$ es un subálgebra de $\mathcal{B}(S)$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Se afirma primero que si $f \in \mathcal{E}$ es tal que $\mathcal{N}_{\infty}(f) \leq 1$, entonces $|f| \in \mathcal{E}$. En efecto, el Lema 5.15 asegura la existencia de un polinomio p tal que

$$(5.58) \quad 0 \leq p(t) \leq |t| \quad \text{y} \quad 0 \leq |t| - p(t) \leq \varepsilon, \quad \forall |t| \leq 1.$$

En particular, $p(0) = 0$. Entonces

$$p(t) = \alpha_1 t + \cdots + \alpha_n t^n$$

para ciertos $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. Defina

$$g = p(f) = \alpha_1 f + \cdots + \alpha_n f^n.$$

Puesto $\mathcal{E}$ es una subálgebra, $g \in \mathcal{E}$. Además, ya que

$$|f(s)| \leq \mathcal{N}_\infty(f) \leq 1, \quad \forall s \in S,$$

se debe tener

$$0 \leq |f(s)| - g(s) = |f(s)| - p(f(s)) \leq \varepsilon, \quad \forall s \in S,$$

por (5.58). Esto prueba que

$$\mathcal{N}_\infty(|f| - g) \leq \varepsilon.$$

Se concluye pues que $|f| \in \overline{\mathcal{E}} = \mathcal{E}$, por ser $\mathcal{E}$ cerrado.

Se afirma ahora que si $f \in \mathcal{E}$, entonces $|f| \in \mathcal{E}$. En efecto, descartando el caso trivial $f = \underline{0}$, se puede suponer que $f \neq \underline{0}$, luego $\mathcal{N}_\infty(f) > 0$. Como $\mathcal{E}$ es subálgebra, se tiene

$$\frac{f}{\mathcal{N}_\infty(f)} \in \mathcal{E} \quad \text{y} \quad \mathcal{N}_\infty\left(\frac{f}{\mathcal{N}_\infty(f)}\right) = 1.$$

Por el caso anterior, se debe tener que

$$\frac{|f|}{\mathcal{N}_\infty(f)} \in \mathcal{E}$$

Nuevamente, por ser $\mathcal{E}$ subálgebra, se concluye que $|f| \in \mathcal{E}$, probando así la afirmación.

Se afirma finalmente que si $f, g \in \mathcal{E}$, entonces $f \vee g, f \wedge g \in \mathcal{E}$. En efecto, ser $\mathcal{E}$ subálgebra y por el caso anterior se concluye que

$$f \vee g = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2} \in \mathcal{E} \quad \text{y} \quad f \wedge g = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2} \in \mathcal{E}. \blacksquare$$

El teorema de Stone-Weierstrass

Se tiene el siguiente importante teorema de aproximación, pero antes será necesario probar un resultado auxiliar.

5.17 Lema. Sea $\mathcal{E}$ un espacio vectorial formado por funciones de un conjunto S en $\mathbb{R}$. Si $\mathcal{E}$ separa puntos de S y $\underline{1} \in \mathcal{E}$, entonces $\mathcal{E}$ separa fuertemente puntos de S .

Demostración. Fije $x \neq y$ en S y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Por hipótesis, existe $f \in \mathcal{E}$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Puesto que $\underline{1} \in \mathcal{E}$ y $\mathcal{E}$ es espacio vectorial, se debe tener

$$g = \frac{\beta}{f(y) - f(x)}(f - f(x)\underline{1}) + \frac{\alpha}{f(x) - f(y)}(f - f(y)\underline{1}) \in \mathcal{E}.$$

Esta función g claramente satisface $g(x) = \alpha$ y $g(y) = \beta$. $\blacksquare$

5.18 Teorema. (Teorema de Stone-Weierstrass.) Sea X un espacio métrico compacto y sea $\mathcal{E}$ un subconjunto del espacio $\mathcal{C}(X)$ de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ provisto de la norma uniforme $\mathcal{N}_\infty$. Si $\mathcal{E}$ es una subálgebra que separa fuertemente puntos de X , entonces $\mathcal{E}$ es denso en $\mathcal{C}(X)$. En particular, la conclusión subsiste si $\mathcal{E}$ es una subálgebra que separa puntos de X y que contiene al elemento uno $\underline{1}$ del álgebra normada $\mathcal{C}(X)$.

Demostración. Por la Proposición 5.14 la adherencia $\overline{\mathcal{E}}$ en $\mathcal{B}(X)$ de $\mathcal{E}$ es también una subálgebra de $\mathcal{B}(X)$. Pero como $\mathcal{C}(X)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{B}(X)$ (vea el Ejemplo 4.3), dicha adherencia está contenida, de hecho, en $\mathcal{C}(X)$. Así pues, $\overline{\mathcal{E}}$ es una subálgebra cerrada de $\mathcal{C}(X)$ que sigue separando fuertemente puntos de X (¿Por qué?).

Por el Teorema 5.16, $\overline{\mathcal{E}}$ es un sublattice. Ya que X un espacio métrico compacto y $\overline{\mathcal{E}}$ es un sublattice de $\mathcal{C}(X)$ que separa fuertemente puntos de X , entonces $\overline{\mathcal{E}}$ debe ser un conjunto denso en $\mathcal{C}(X)$. Siendo $\overline{\mathcal{E}}$ un conjunto cerrado en $\mathcal{C}(X)$, se concluye que $\overline{\mathcal{E}} = \mathcal{C}(X)$.

La segunda parte del teorema es consecuencia inmediata del Lema 5.17. ■

Se sabe de Cálculo que si una función es de clase $\mathcal{C}_\infty$ en algún intervalo, entonces existen polinomios que aproximan a la función tanto como se quiera (los polinomios de Taylor). El notable resultado siguiente establece lo mismo pero para funciones que solamente son continuas.

5.19 Corolario. (Teorema de Weierstrass.) Sea X un conjunto cerrado y acotado en $\mathbb{R}$. Si f es una función continua de X en $\mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe un polinomio p tal que

$$|f(t) - p(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in X.$$

Demostración. Se verifica de inmediato que el conjunto $\mathcal{P}(X)$ de funciones polinomiales de X en $\mathbb{R}$ es una subálgebra de $\mathcal{C}(X)$ que contiene a $\underline{1}$. El polinomio

$$p_0(t) = t, \quad \forall t \in X,$$

claramente separa cualquier par de puntos de X . Por el Teorema 5.18, $\mathcal{P}(X)$ es denso en $\mathcal{C}(X)$. ■

Ejercicios

5.1. Usando la definición, **determine** si las sucesiones de funciones siguientes son o no uniformemente convergentes en los intervalos que se indican.

- i. $f_n(x) = x^n(1 - x^n), \quad 0 \leq x \leq 1.$
- ii. $f_n(x) = \frac{1}{nx}, \quad 0 < x \leq 1.$
- iii. $f_n(x) = n^3 x^n(1 - x), \quad 0 \leq x \leq 1.$
- iv. $f_n(x) = \frac{1}{1 + nx}, \quad 0 < x < 1.$

5.2. Encuentre todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales la sucesión de funciones

$$f_n(x) = n^\alpha x(1 - x^2)^n$$

es uniformemente convergente en $[0, 1]$.

5.3. **Determine** si las sucesiones de funciones siguientes son o no uniformemente convergentes en los intervalos que se indican.

- i. $f_n(x) = \frac{1}{1 + n^2 x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1.$
- ii. $f_n(x) = \frac{x}{1 + nx}, \quad 0 \leq x \leq 1.$
- iii. $f_n(x) = \frac{nx}{1 + nx^2}, \quad 0 \leq x \leq 1.$

5.4 **Proporcione** contraejemplos en cada uno de los siguientes casos.

- i. Una sucesión de funciones continuas que converja puntualmente a una función no continua.
- ii. Una sucesión de funciones continuas que converja puntualmente, pero no uniformemente, a una función continua.

5.5. **Demuestre** que si $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de funciones tal que cada una es acotada y la sucesión converge uniformemente en algún conjunto X , entonces la sucesión de funciones es equiacotada o uniformemente acotada en X , es decir, existe $M \geq 0$ tal que

$$|f_n(x)| \leq M, \quad \forall x \in X \quad \text{y} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

5.6. Sean $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ dos sucesiones de funciones que convergen uniformemente en algún conjunto X .

- i. **Pruebe** que $\{f_n + g_n\}_{n=1}^\infty$ es uniformemente convergente en X .

ii. Muestre que si cada f_n y g_n son funciones acotadas en X , entonces $\{f_n g_n\}_{n=1}^{\infty}$ es uniformemente convergente en X .

5.7. Demuestre que si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones continuas de un espacio métrico compacto X en $\mathbb{R}$, entonces $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a alguna función f si y sólo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(x)$$

para toda sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergente a cualquier punto $x \in X$.

5.8. Investigue si las sucesiones de funciones siguientes satisfacen o no las hipótesis y/o la conclusión del teorema de derivación para sucesiones de funciones en el intervalo indicado.

i. $f_n(x) = \frac{e^{-n^2 x^2}}{n}, \quad x \in \mathbb{R}.$

ii. $f_n(x) = \sqrt{n} x^n (1 - x), \quad 0 \leq x \leq 1.$

5.9. Se sabe que

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{y} \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Aplicando el teorema de derivación para sucesiones de funciones, **pruebe** la identidad

$$\sin' x = \cos x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

5.10. Muestre que la serie de funciones

$$s(x) = x(1-x) - x(1-x) + \cdots + x^n(1-x) - x^n(1-x) + \cdots$$

es absolutamente y uniformemente convergente en $[0, 1]$. **Rearregle** los términos de la serie de tal manera que se obtenga una serie que no sea uniformemente convergente en $[0, 1]$. En particular, esto prueba que la convergencia absoluta de una serie no implica su convergencia uniforme.

5.11. Sea

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2 x}.$$

Determine todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la serie de funciones converge absolutamente. **Indique** en qué intervalos dicha serie deja de converger uniformemente y en

qué intervalos sí converge uniformemente. ¿Es f continua? ¿Es f acotada? **Justifique.**

5.12. Determine si es o no uniformemente convergente en $[0, 1[$ la serie de funciones

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n.$$

5.13. Investigue la convergencia puntual, absoluta y/o uniforme en $[0, 1]$ de la serie de funciones

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{n+1}}{2n+2} \right].$$

5.14. Demuestre que la serie de funciones

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2}$$

converge uniformemente en todo intervalo acotado pero que no converge absolutamente para ningún $x \in \mathbb{R}$. En particular, la convergencia uniforme de una serie no implica en general su convergencia absoluta.

5.15. Pruebe que la serie de funciones

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \operatorname{sen} \left(1 + \frac{x}{n} \right)$$

es uniformemente convergente en todo conjunto compacto de $\mathbb{R}$.

5.16. Muestre que si $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de funciones que converge uniformemente a cero en un conjunto X , entonces la serie de funciones

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n g_n(x)$$

converge uniformemente en X .

5.17. Aplique los criterios de Abel para determinar si las series de funciones siguientes son o no uniformemente convergentes en los intervalos que se indican.

- i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} e^{-nx}, \quad 0 \leq x \leq 1.$
- ii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}, \quad 0 \leq x \leq 1.$
- iii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}, \quad 0 \leq x < \infty.$

$$\text{iv.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} e^{-nx}, \quad 0 < \delta \leq x \leq 1 - \delta.$$

Sugerencia. Usando la identidad trigonométrica

$$2 \sin \frac{x}{2} \sin kx = \cos \left(k - \frac{1}{2} \right) x - \cos \left(k + \frac{1}{2} \right) x,$$

obtenga y use la identidad

$$\sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

5.18. Sea $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente de números positivos. Aplique el criterio de Cauchy para **demostrar** que la serie de funciones

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx$$

converge uniformemente en $\mathbb{R}$ si y sólo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nc_n = 0.$$

Sugerencia. Para probar una de las implicaciones, siga la idea empleada en la demostración de los criterios de Abel. Para la otra: razone por negación, observe que no habrá convergencia uniforme en $\mathbb{R}$ si no la hay en algún intervalo compacto a la derecha de cero, recuerde que la función $t \mapsto \sin t$ es creciente y no negativa en $[0, \pi/2]$ y use la identidad trigonométrica empleada en el Ejercicio 5.16, (iv).

5.19. Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones monótonas en $[a, b]$ (f_n puede ser creciente para algunos valores de n y decreciente para otros) que converge puntualmente a un función f continua en $[a, b]$, **demuestre** que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a f uniformemente en $[a, b]$.

Sugerencia. Pruebe primero que f debe ser monótona. Suponiendo que f es creciente, deduzca que $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$. Dado $\varepsilon > 0$, considere una subdivisión de $[f(a), f(b)]$ por un número finito de puntos tal que la distancia entre dos puntos consecutivos sea menor que ε .

5.20. Pruebe que el subconjunto de $(\mathcal{C}([0, 1]), \mathcal{N}_{\infty})$ dado por

$$\mathcal{H} = \{f_n(x) = \sin(nx), \quad x \in [0, 1] \mid n \in \mathbb{N}\}$$

no es equicontinuo.

5.21. Considere un espacio métrico compacto X y un subconjunto $\mathcal{H}$ de $(\mathcal{C}(X), \mathcal{N}_\infty)$. **Muestre** que $\mathcal{H}$ es relativamente compacto en $\mathcal{C}(X)$ si y sólo si $\mathcal{H}$ es equicontinuo y, para cada $x \in D$, el conjunto

$$\mathcal{H}(x) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid f \in \mathcal{H}\}$$

es relativamente compacto en $\mathbb{R}$, donde D es algún subconjunto denso de X .

5.22. Sea X un espacio métrico. Si $\mathcal{E}$ es un subconjunto denso de $(\mathcal{BC}(X), \mathcal{N}_\infty)$, **demuestre** que $\mathcal{E}$ separa puntos en X .

5.23. Pruebe que toda $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ puede ser uniformemente aproximada tanto como se quiera por polinomios tales que sus coeficientes impares son cero.

5.24. Una función $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es **impar** si $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in [-1, 1]$. **Muestre** que toda función continua impar sobre $[-1, 1]$ puede ser uniformemente aproximada tanto como se quiera por polinomios tales que todos sus coeficientes pares son cero.

5.25. Demuestre que el espacio de Banach $(\mathcal{C}([0, 1]), \mathcal{N}_\infty)$ es separable.

5.26. Sean X y Y dos espacios métricos compactos. Si $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, **pruebe** que para cada $\varepsilon > 0$ existen funciones continuas $g_1, \dots, g_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ y $h_1, \dots, h_n : Y \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\sup_{(x,y) \in X \times Y} \left| f(x, y) - \sum_{i=1}^n g_i(x) h_i(y) \right| \leq \varepsilon .$$

5.27. Los ejercicios y preguntas que aparecen a lo largo del capítulo.